Übungen

Abgabetermin: Dienstag 06.01, 10:15 Uhr, Briefkasten 146

THEMEN: Erneuerungstheorie

Aufgabe 36

Gegeben sei ein SEP $(S_n)_{n\geq 0}$ mit positiver Drift $0 < \mu := \mathbb{E}X_1 < \infty$ und $\mathbb{U}(\cdot) = \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(S_n \in \cdot)$. Sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende, $\lambda\!\!\lambda_d$-integrierbare Funktion und

$$g * U(t) = \int_{[0,t]} g(t-x)\mathbb{U}(dx).$$

Zeigen Sie:

$$\cancel{d}\lim_{t\to\infty} g * \mathbb{U}(t) = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} g(x)\lambda\!\!\lambda_d(dx).$$

Hinweis: Benutzen Sie das Blackwellsche Erneuerungstheorem und Approximation durch Treppenfunktionen.

Aufgabe 37

Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein nicht-arithmetischer SEP mit positiver Drift $\mu < \infty$. Für $t \geq 0$ definiere die Erstaustrittszeit

$$\tau(t) := \inf\{n \geq 0 : S_n > t\}$$

und betrachte die Vorwärts- und Rückwärts-Rekurrenzzeiten

$$R(t) := S_{\tau(t)} - t \text{ und } \hat{R}(t) := t - S_{\tau(t)-1}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$R(t) \xrightarrow{d} R(\infty) \text{ und } \hat{R}(t) \xrightarrow{d} R(\infty)$$

für $t \to \infty$, wobei $\mathcal{L}(R(\infty)) = F^s$ mit

$$F^s(x) := \frac{1}{\mu}\int_0^x \mathbb{P}(X > y)dy.$$

Hinweis: Betrachten Sie für die erste Aussage $r \mapsto \mathbb{P}(R(t) > r)$ und nutzen Sie die Aufgabe 36.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $R(\infty)$. Wann ist dieser endlich?

Bitte wenden!

Aufgabe 38 Gegeben sei die Situation aus Aufgabe 37. Zeigen Sie

a) $\mathbb{E}\tau(t) = \mathbb{U}([0,t])$ für alle $t \geq 0$.

b) $t^{-1}\mathbb{E}\tau(t) \xrightarrow{t\to\infty} \mu^{-1}$.

c) $t^{-1}\mathbb{E}R(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.
Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{E}S_{\tau(t)}$ und benutzen Sie die Wald'sche Gleichung.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr wünschen Ihnen
Gerold Alsmeyer und Fabian Buckmann