Institut für
mathematische Statistik

Alsmeyer/Buckmann: Wahrscheinlichkeitstheorie II
WS 2014/2015, Blatt 8

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 16.12, 10:15 Uhr, Briefkasten 146

THEMEN: Erneuerungstheorie

Aufgabe 32 (3 Punkte)
Seien P und Q zwei Borel-Maße mit $Q(dx) = ce^{\alpha x}P(dx)$, $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$Q^{*n}(dx) = c^n e^{\alpha x} P^{*n}(dx).$$

Definition 1
Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von u.i.v., nicht-negativen ZG und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, $n \geq 1$, $S_0 := 0$. Dann nennen wir $(S_n)_{n\geq 0}$ einen Standard-Erneuerungsprozess (SEP).

Aufgabe 33 (6 Punkte)
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein SEP mit Zuwachsverteilung $\mathit{Bern}(1,p)$, $p \in (0,1)$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Bestimmen Sie die Verteilung von $N(k) := \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{S_n \leq k\}}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

b) $\mathbb{E}e^{aN(k)} < \infty$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt genau dann, wenn $a < -\log(1-p)$.

c) Sei $\mathbb{U}(\cdot) := \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n \in \cdot)$. Bestimmen Sie $\mathbb{U}([0,n])$.

Aufgabe 34 (6 Punkte)
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein SEP mit Zuwachsverteilung $\mathit{Exp}(1/\mu)$, $\mu > 0$, und Erneuerungsmaß $\mathbb{U}(\cdot) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S_n \in \cdot)$. Ferner sei $\tau(t) := \inf\{n \geq 0 : S_n > t\}$ und $R(t) := S_{\tau(t)} - t$ für $t > 0$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{U}$.

b) Zeigen Sie $\mathbb{P}(R(t) > s) = e^{-(t+s)/\mu} + \int_{[0,t]} e^{-(t+s-x)/\mu}\mathbb{U}(dx)$ für alle $s > 0$.

c) Zeigen Sie $R(t) \stackrel{d}{=} \mathit{Exp}(1/\mu)$.

Aufgabe 35 (5 Punkte)
Gegeben sei die Situation aus Aufgabe 34. Bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion von S_n und schließen Sie damit auf die Verteilung von $N(t) := \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}$ für $t \geq 0$.