Übungen

Abgabetermin: Dienstag 09.12, 10:15 Uhr, Briefkasten 146

THEMEN: Median, Große Abweichungen

Aufgabe 28 (5 Punkte)
Sei X eine ZG. Zeigen Sie:

a) Existenz: Falls

$$\mathfrak{m}_*(X) := \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\right\},$$

so definiert $\mathfrak{m}_*(X)$ einen Median von X, und es gilt $\mathfrak{m}_* \leq \mathfrak{m}(X)$ für jeden weiteren Median $\mathfrak{m}(X)$.

b) $\mathfrak{m}(X)$ ist genau dann eindeutig, wenn

$$\mathbb{P}(X \leq x) > \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \mathbb{P}(X \leq x) > \mathbb{P}(X \leq \mathfrak{m}(X)) \text{ für alle } x > \mathfrak{m}(X).$$

c) Aus $\mathbb{P}(|X| \geq c) < \frac{1}{2}$ folgt $|\mathfrak{m}(X)| \leq c$.

d) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\mathfrak{m}(X) + c$ ein Median von $X + c$ und $c\mathfrak{m}(X)$ ein Median von cX.

e) Ist X symmetrisch, so ist 0 ein Median von X.

Aufgabe 29 (5 Punkte)
Sei X eine ZG mit KeF Ψ und $\mathbb{D}(\Psi) \supset \mathbb{R}_{\geq}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\to\infty} \Psi'(r) = ||X^+||_\infty.$$

Aufgabe 30 (5 Punkte)
Gegeben sei eine Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ von u.i.v. ZG und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, $n \geq 1$. Zeigen Sie jeweils, dass eine Funktion I existiert, so dass für $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \log \mathbb{P}(S_n - n\mathbb{E}X_1 \geq a) = -I(a)$$

und bestimmen Sie I.

a) $X_1 \stackrel{d}{=} Bern(1, p)$, $p \in (0, 1)$.

b) $X_1 \stackrel{d}{=} Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Aufgabe 31 (5 Punkte)
Gegeben sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ und die Situation wie in Aufgabe 30 a). Nutzen Sie das dortige Ergebnis um für jedes $b > a$ und n hinreichend groß

$$\mathbb{P}\Big(\frac{S_n - np}{n^\alpha \sqrt{p(1-p)}} \geq a\Big) \leq \exp\Big(-\frac{b^2}{2} n^{2\alpha-1}\Big)$$

zu zeigen.
Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Entwicklung vom Logarithmus.