Institut für
mathematische Statistik

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 25.11, 10:15 Uhr, Briefkasten 146

THEMEN: Stetigkeitssatz von Levy, Gleichgradige Integrierbarkeit

Aufgabe 18 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. und integrierbaren ZG. Zeigen Sie unter Verwendung von FT, dass $n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\mathbb{E}X_1$ konvergiert (WLLN).

Aufgabe 19 (2+3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die Verteilung von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}.$$

Aufgabe 20 (5 Punkte)
Es werden n Körper der Masse M zufällig und unabhängig voneinander auf das Intervall $[-n, n]$ verteilt. Y_n sei die Kraft, die diese n Körper zusammen auf einen Körper der Masse 1 im Ursprung ausüben. Dabei übt ein Körper der Masse M im Punkt x auf den Körper im Nullpunkt die Kraft $cMx^{-2}\mathrm{signum}(x)$ aus, $c > 0$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $k \in (0,\infty)$ existiert, so dass die Verteilung von Y_n für $n \to \infty$ schwach gegen eine Verteilung mit der FT $\phi(t) = \exp\left(-k|t|^{1/2}\right)$ konvergiert.

Aufgabe 21 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. ZG mit $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\mathbb{E}X_1^4 < \infty$ sowie $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right|^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $0 \le p < 4$ gleichgradig integrierbar ist.
Hinweis: Berechnen Sie $\mathbb{E}S_n^4$.

Bitte wenden!

Aufgabe 22 (5* Punkte)
Zeigen Sie mit Satz 12.3 (Satz von Riesz), dass die Aussage von Aufgabe 21 unter gleichen Voraussetzungen auch für $p = 4$ gilt.