Institut für
mathematische Statistik

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 18.11, 10:15 Uhr, Briefkasten 146

THEMEN: Straffheit, schache und vage Konvergenz

Aufgabe 14 (1+4 Punkte)
Für einen Zufallsvektor X im $\mathbb{R}^d$ sei $\mathcal{C}(F)$ die Menge der Stetigkeitspunkte der Verteilungsfunktion F und und $\mathcal{S}(F) := \times_{k=1}^{d}\mathcal{C}(F^{(k)})$, wobei $F^{(k)}$ die k-te Randverteilungsfunktion von $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ sei.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}(F) \subset \mathcal{C}(F)$ gilt und beide Mengen dicht im $\mathbb{R}^d$ sind.

b) Gegeben eine Folge $X, X_1, X_2, \dots$ von Zufallsvektoren im $\mathbb{R}^d$ mit Verteilungsfunktionen $F, F_1, F_2, \dots$ gilt $X_n \stackrel{d}{\to} X$ genau dann, wenn $F_n(t) \to F(t)$ für alle $t \in \mathcal{S}(F)$ gilt.

Aufgabe 15 (5 Punkte)
Es sei $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge endlicher Maße auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Zeigen Sie, dass jede der beiden folgenden Aussagen hinreichend ist für $Q_n \stackrel{v}{\to} Q_0$.

a) $Q_n(t) \to Q_0(t)$ für alle $t \in \mathcal{C}(Q_0)$.

b) $\overline{Q}_n(t) \to \overline{Q}_0(t)$ für alle $t \in \mathcal{C}(Q_0)$.

(Dabei bezeichne $Q(t) := Q((-\infty, t])$ und $\overline{Q}(t) := Q((t, \infty))$ für $t \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 16 (3+4 Punkte)

a) Es sei $I \subset (0, \infty)$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
   (i) Die Familie $\{Exp(\lambda) | \lambda \in I\}$ ist straff.
   (ii) Es gibt ein $\delta > 0$ mit $I \subset [\delta, \infty)$.

b) Es sei $I \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
   (i) Die Familie $\{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) | (\mu, \sigma^2) \in I\}$ ist straff.
   (ii) Es gibt reelle Zahlen $a, b > 0$ mit $I \subset [-a, a] \times [0, b]$.
   (Dabei sei $\mathcal{N}(\mu, 0) := \delta_\mu$ für $\mu \in \mathbb{R}$.)

Bitte wenden!

Aufgabe 17 (3 Punkte)
Sei $(Q_i)_{i\in I}$ eine Familie von W-Maßen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine messbare Funktion mit $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$. Zeigen Sie:

$$\sup_{i\in I} \int f dQ_i < \infty \ \Rightarrow (Q_i)_{i\in I} \text{ ist straff.}$$