

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 11.11, 10:15 Uhr, Briefkasten 146

THEMEN: Fourieranalytische Charakterisierung von Verteilungseigenschaften,
Straffheit

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es sich bei $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ um eine Wahrscheinlichkeitsdichte (die der *Pólya-Verteilung*) handelt.

Hinweis: Zeigen Sie für $\hat{f}(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ die Gleichheit $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \hat{f}(t) dt$.

Aufgabe 11 (4+2 Punkte)

Es sei ϕ die FT einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.

a) Zeigen Sie, dass ϕ genau eine der drei Bedingungen erfüllt:

- (i) $|\phi(t)| < 1$ für alle $t \neq 0$.
- (ii) $|\phi(t)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (iii) Es gibt ein $d > 0$, so dass $\{t \in \mathbb{R} : |\phi(t)| = 1\} = d\mathbb{Z}$.

Hinweis: Aufgabe 12

b) Es gelte $|\phi(t)| = |\phi(\alpha t)| = 1$ für ein $t \neq 0$ und ein irrationales $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass P eine Dirac-Verteilung ist.

Aufgabe 12 (5 Punkte)

Eine Zufallsgröße X besitzt eine *Gitterverteilung*, falls $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ existieren mit $\mathbb{P}(X \in a + b\mathbb{Z}) = 1$. ϕ_X bezeichne die FT der Zufallsgröße X .

a) Die Zufallsgröße X besitze eine Gitterverteilung mit Parametern $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}(X = a + bk) = \frac{b}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{b}}^{\frac{\pi}{b}} \phi_X(t) e^{-i(a+bk)t} dt \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i) X besitzt eine Gitterverteilung.
- (ii) Es gibt ein $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|\phi_X(t_0)| = 1$.
- (iii) Es gibt ein $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(t_0(x - s))) \mathbb{P}^X(dx) = 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 13 (5 Punkte)

Es sei $T : (\mathbb{R}^{d_1}, \mathfrak{B}^{d_1}) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_2}, \mathfrak{B}^{d_2})$, $d_1, d_2 \geq 0$, eine messbare Funktion und $(Q_i)_{i \in I}$ eine Familie endlicher Maße auf $(\mathbb{R}^{d_1}, \mathfrak{B}^{d_1})$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $(Q_i)_{i \in I}$ straff $\Rightarrow (Q_i^T)_{i \in I}$ straff.

b) $(Q_i^T)_{i \in I}$ straff $\Rightarrow (Q_i)_{i \in I}$ straff.