Übungen

Abgabetermin: Dienstag 4.11, 10:15 Uhr, Briefkasten 146
THEMEN: Fourier-Transformierte, Umkehrformel von Lévy

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Bestimmen Sie den Definitionsbereich der MeF eines Maßes mit $\lambda\!\!\lambda$-Dichte

$$f_p(x) = c_p x^p e^{-x} \mathbf{1}_{(1,\infty)}(x),$$

$c_p := (\int x^p e^{-x} \mathbf{1}_{(2,\infty)}(x) dx)^{-1}$, in Abhängigkeit von $p > -2$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Prüfen Sie, ob folgende Funktionen $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ FT eines Wahrscheinlichkeitsmaßes sind, und geben Sie dieses ggf. an:

a) $f_1(t) = \cos^2 t - \sin^2 t$,

b) $f_3(t) = e^{i\sqrt{|t|}}$,

c) $f_2(t) = \sin^n(it),\ n \in \mathbb{N}$,

d) $f_4(t) = \frac{\sin(at)}{at}, a > 0$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Es sei X eine reellwertige Zufallsgröße mit FT ϕ. Es gelte

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\phi(t)}{t^2} = \frac{\sigma^2}{2},\ \sigma^2 > 0.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}X = 0$ und $Var\ X = \sigma^2$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie $\frac{1-Re(\phi(t))}{t^2}$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Beweisen Sie die mehrdimensionale Umkehrformel von P. Lévy für den Fall $d = 2$.

Aufgabe 9 (2+3 Punkte)

a) Bestimmen Sie die FT einer Zufallsgröße mit der $\lambda\!\!\lambda$-Dichte

$$g(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}, a > 0.$$

b) Für $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ bezeichne $\mathcal{C}(a,b)$ die Cauchy-Verteilung mit der $\lambda\!\!\lambda$-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{b^2 + (x-a)^2}.$$

Berechnen Sie die FT der $\mathcal{C}(a,b)$-Verteilung.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst die FT der $\mathcal{C}(0,1)$-Verteilung mit Hilfe von Teil a) und Satz 9.14.