Übungen

Abgabetermin: Dienstag 27.01, 10:15 Uhr, Briefkasten 146

THEMEN: Galton-Watson-Prozesse

Aufgabe 47 (6 Punkte)
Es seien $(Z_n)_{n\geq 0}$ und $(\widehat{Z}_n)_{n\geq 0}$ zwei GWP mit demselben Reproduktionsmittel μ, Reproduktionsvarianzen σ^2 bzw. $\widehat{\sigma}^2$ sowie Reproduktionsverteilungen $(p_n)_{n\geq 0}$ bzw. $(\widehat{p}_n)_{n\geq 0}$ für die

$$a_n := \mathbb{P}(Z_1 > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \widehat{p}_k = \mathbb{P}(\widehat{Z}_1 > n) =: \widehat{a}_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte und $a_n < \widehat{a}_n$ für mindestens ein n. Beweisen Sie die folgenden Aussagen

a) $f < \widehat{f}$ auf $[0,1)$ (insbesondere $p_0 < \widehat{p}_0$ und auch $q < \widehat{q}$ falls $\mu > 1$), $f_n \leq \widehat{f}_n$ auf $[0,1]$ für alle $n \geq 1$ und $p_1 > \widehat{p}_1$.

b) Falls zudem $\sigma^2 < \infty$ ist, so gilt $\sigma^2 < \widehat{\sigma}^2$.

c) Falls $\mu > 1$ ist, dann gilt für die Laplace-Transformierten φ bzw. $\widehat{\varphi}$ von $\lim_{n\to\infty} \mu^{-n} Z_n$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \mu^{-n} \widehat{Z}_n$ die Ungleichung $\varphi \leq \widehat{\varphi}$ auf $[0,\infty)$.

Aufgabe 48 (5 Punkte)
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWP mit endlichem Reproduktionsmittel $\mu > 1$, Aussterbewahrscheinlichkeit $q < 1$ und $W = \lim_{n\to\infty} \mu^{-n} Z_n$ erfülle

$$\mathbb{P}(W \in \cdot \,|\, W > 0) \sim \mathit{Exp}(1-q).$$

Dann besitzt $(p_n)_{n\geq 0}$ eine gebrochen-rationale Reproduktionsverteilung.

Aufgabe 49 (5 Punkte)
In der Situation von Satz 8.2. gelte $h(s) = \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha s}$ für ein $\alpha \in (0,1)$.

a) Zeigen Sie, dass h die erzeugende Funktion einer Verteilung auf $\mathbb{N}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass dann die Reproduktionsverteilung vom gebrochen-rationalen Typ ist und bestimmen Sie deren Parameter in Abhängigkeit von α und μ.

Bitte wenden!

Aufgabe 50 (4 Punkte)
Gegeben einen beliebigen Galton-Watson-Prozess $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit einem Urahnen und Reproduktionsverteilung $(p_n)_{n\geq 0}$, erfüllt der Aussterbezeitpunkt $T := \inf\{n \geq 1 : Z_n = 0\}$ die stochastische Fixpunktgleichung

$$T \stackrel{d}{=} 1 + \max\{T_1, \ldots, T_N\},$$

wobei N,$T_1, T_2, \ldots$ stochastisch unabhängig sind mit $N \stackrel{d}{=} (p_n)_{n\geq 0}$ und $T_n \stackrel{d}{=} T$ für alle $n \geq 1$.