

Übungen

Abgabetermin: Dienstag 20.01, 10:15 Uhr, Briefkasten 146

THEMEN: Galton-Watson-Prozesse

Aufgabe 43 (5 Punkte)

Es sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und Aussterbewahrscheinlichkeit q . Dann gilt

$$c_* := \frac{p_0}{1 - p_1} \leq q \leq \frac{p_0}{1 - p_0 - p_1} \wedge 1 := c^*$$

wobei im Fall $p_1 = 1$ die Variablen c_* und c^* auf 0 gesetzt werden (also $\frac{0}{0} := 0$).

Aufgabe 44 (5 Punkte)

Es sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \sim \text{Geo}(\frac{1}{\mu+1})$ für ein $\mu \geq 0$, d.h. $p_n = \frac{1}{\mu+1} (\frac{\mu}{\mu+1})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Aussterbewahrscheinlichkeit $q = q(\mu)$ gegeben ist durch

$$q(\mu) = \frac{1}{\mu} \wedge 1.$$

Vergleichen Sie $q(\mu)$ mit den Schranken aus Aufgabe 43, indem Sie diese z.B. mit R gegeneinander plotten.

(Eine Einführung zum Skizzieren von Funktionsverläufen finden Sie in dem Kapitel *Deskriptive Statistik* auf der Homepage des R-Praktikums. Die Funktion `pmin` kann hilfreich sein.)

Aufgabe 45 (6 Punkte)

Es sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein GWP in einem Standardmodell und $(k_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass $W_n^* = k_n^{-1} Z_n$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ \mathbb{P}_i -fast sicher gegen eine ZG W^* mit Werten in $[0, \infty]$ konvergiert. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- a) $\mathbb{P}_i(W^* \in \cdot) = \mathbb{P}(W^* \in \cdot)^{*i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- b) Falls $k_n^{-1} k_{n+1} \rightarrow \mu = \mathbb{E}Z_1 < \infty$ konvergiert, so erfüllt W^* die stochastische Fixpunktgleichung

$$W^* = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{Z_1} W^*(j) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

wobei $(W^*(j))_{j \in \mathbb{N}}$ unabhängige Kopien von W^* sind, die auch unabhängig von Z_1 sind.

- c) Lemma 5.2 ist auch für W^* erfüllt, d.h. es gilt entweder $W^* = 0$ \mathbb{P}_i -f. s. für alle $i \in \mathbb{N}$ oder

$$\mathbb{P}_i(W^* > 0) = \mathbb{P}_i(Z_n \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

- d) $\kappa = \mathbb{P}(W^* < \infty)$ ist ein Fixpunkt von f und demnach gilt $\kappa = 1$ oder $\kappa = q$.

Aufgabe 46 (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie, dass für zwei superkritische GWP $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\hat{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit gleichem (endlichen) Reproduktionsmittel $\mu = \hat{\mu}$ und gleicher Aussterbewahrscheinlichkeit $q = \hat{q}$ bereits $p_n = \hat{p}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.