Marcel Ortgiese

Stochastische Analysis

Version vom 29. Januar 2015

Vorlesungsmanuskript WiSe 2014/2015
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung **1**

0.1 Motivation . . . 1

0.2 Literatur . . . 7

0.3 Notation . . . 8

1 Prozesse, Filtrationen und Martingale **9**

1.1 Stochastische Prozesse in stetiger Zeit . . . 9

1.2 Filtrationen und Stoppzeiten . . . 12

1.3 Martingale . . . 18

1.4 Semimartingale, quadratische Variation . . . 27

2 Das stochastische Integral **39**

2.1 Die Konstruktion des stochastischen Integrals . . . 39

2.2 Die Itô Formel . . . 47

2.3 Darstellungssätze für lokale Martingale . . . 54

3 Stochastische Differentialgleichungen **57**

3.1 Starke Lösungen . . . 58

3.2 Schwache Lösungen . . . 69

3.3 Schwache Lösungen via Girsanov . . . 72

3.4 Schwache Lösungen: Markovprozesse und Martingalprobleme . . . 80

A Anhang **93**

Index **95**

Literaturverzeichnis **96**

Kapitel 0

Einleitung

0.1 Motivation

Das Hauptziel dieser Vorlesung ist es die Grundtechniken für stochastische Prozesse in stetiger Zeit kennenzulernen. Genauso wie in der Analysis infinitesimale Vorgänge beschrieben werden, werden wir sehen wie man in der *stochastischen Analysis* beispielsweise stochastische Differentialgleichungen dazu nutzen kann um stochastische Prozesse zu beschreiben. In dieser Einleitung möchte ich einen Überblick geben über einige der Ideen, die später in der Vorlesung aufgegriffen werden. Alle neuen Begriffe und die behaupteten Aussagen werden im Laufe der Vorlesung nochmals ausführlich besprochen und mathematisch sauber formuliert.

In zahlreichen Gebieten wie Physik, Biologie oder Ökonomie wird klassischerweise die Evolution eines dynamischen Systems durch Differentialgleichungen beschrieben. Ein einfaches Beispiel ist

$$\dot{x}(t) = b(t, x(t)),$$

dabei ist $x(t)$ der Zustand (in einem geeigneten Raum) zur Zeit t. In der Realität müssen allerdings Störungen (durch Messfehler, durch Effekte, die in erster Approximation ignoriert wurden) mit berücksichtigt werden. Der Einfachheit halber werden diese häufig als zufällige Störungen modelliert.

Ein klassisches Beispiel ist die Beobachtung, die der Botaniker Robert Brown 1827 gemacht hat: er bemerkt, dass Pollen in einem Wassertropfen nicht still liegen, sondern eine sehr irreguläre Bewegung ausführen. Dieses Phänomen wird dadurch erklärt, dass die relativ großen Pollenteilchen fortwährend von den viel kleineren Wassermolekülen angestoßen werden. Die resultierende Bewegung ist sehr irregulär, bleibt aber im Mittel konstant.

Mathematisch wurde diese Beobachtung 1905 von A. Einstein mit Hilfe der *Brown'schen Bewegung* modelliert. Eine Möglichkeit sich eine eindimensionalen Brown'sche Bewegung vorzustellen ist als Skalierungsgrenzwert einer Irrfahrt. Das heißt wir starten mit einer

Irrfahrt (also einem Objekt in diskreter Zeit) und skalieren Zeit und Raum so, dass wir einen zeitstetigen stochastischen Prozess erhalten.

Zur Erinnerung: Gegeben sei eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen X_i mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\mathrm{Var}(X_i) = 1$. Diese sollen die einzelnen Stöße der Wassermoleküle modellieren. Dann definiert

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

eine Irrfahrt (engl. random walk), die die Position des Pollenteilchens zur Zeit n beschreibt. Nun möchten wir die Tatsache modellieren, dass die kleinen Stöße nahezu andauernd auftreten. D.h. wir skalieren die Zeit so um, dass die diskrete Zeit n im stetigen der Zeit 1 entspricht. Wie müssen wir dann die räumliche Skalierung wählen? Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n = 0$ fast sicher gilt. D.h. wenn wir räumlich mit n Skalieren, erhalten wir einen Prozess, der konstant 0 ist. Wir erinnern uns nun an den zentrale Grenzwertsatz, der besagt, dass $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \Rightarrow N$, wobei N eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Damit haben wir also die richtige räumliche Skalierung gefunden. Nun wollen wir nicht nur die Position zur Zeit 1 verstehen, sondern auch die zeitliche Entwicklung des Prozesses. Dazu definieren wir den Prozess

$$S_t^n := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt} & \text{für } t = \frac{k}{n}, k \in \mathbb{N}_0, \\ \text{linear interpoliert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann kann man zeigen (Satz von Donsker), dass der stochastische Prozess $(S_t^n)_{t\geq 0}$ in einem geeigneten Sinn gegen eine Brown'sche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ konvergiert.

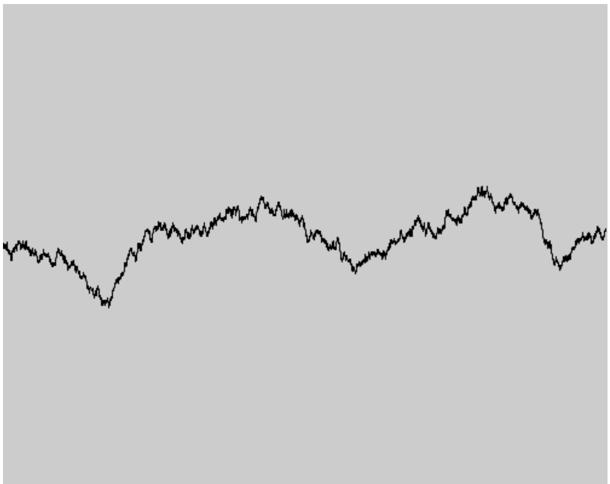

Abbildung 1: Eine Simulation einer Brown'schen Bewegung.

Formal ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

(i) $B_0 = 0$ fast sicher.

(ii) Für alle $0 \leq s \leq t$ ist das Inkrement $B_t - B_s$ unabhängig von $(B_u)_{0 \leq u \leq s}$.

(iii) Für alle $0 \leq s \leq t$ ist das Inkrement normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$.

(iv) B hat fast sicher stetige Pfade.

Warum spielt dieser Prozess so eine große Rolle in praktischen Anwendungen?

Zunächst haben wir gesehen, dass die Approximation durch eine Irrfahrt sehr robust ist: die Aussage gilt unabhängig davon welche Verteilung X_k hat.

Häufig möchte man wie im Beispiel mit den Pollen, dass die zufällige Störung 'im Mittel konstant' ist. Man fordert in gewisser Weise, dass die Störung ein Martingal ist. Ein Martingal $(M_t)_{t \geq 0}$ erfüllt neben gewissen Integrabilitätsbedingung, dass

$$\mathbb{E}[M_t \,|\mathcal{F}_s] = M_s \quad f.s.,$$

wobei $\mathcal{F}_s$ die Filtration ist, die die Informationen über den Prozess bis zur Zeit s modelliert. Wenn man diese Bedingung umstellt, sieht man, dass

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s) \,|\, \mathcal{F}_s] = 0.$$

Das Inkrement eines Martingals hat also (bedingten) Erwartungswert 0. Eine der Höhepunkte dieser Vorlesung ist die Aussage, dass ein stetiges Martingal immer als eine zeittransformierte Brown'sche Bewegung interpretiert werden kann. Der zweite Grund für die Bedeutung der Brown'schen Bewegung ist also, dass diese *das* Beispiel für ein stetiges Martingal ist.

Wir kommen nun zurück zu dem Problem der Modellierung einer stochastisch gestörten Differentialgleichung. Ein naiver Ansatz wäre also die Evolution eines Systems durch den Ansatz

$$\dot{X} = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\dot{B}_t, \tag{1}$$

zu beschreiben. Wobei σ uns erlaubt lokal die Varianz der Brown'schen Bewegung zu beeinflußen.

Problem 1: Die Brown'sche Bewegung ist so irregulär, dass sie *nicht differenzierbar* ist. $\dot{B}$ macht keinen Sinn.

Lösung 1: Zur Erinnerung: aus dem Fundamentalsatz der Analysis folgt

$$\dot{x} = b(t, x(t)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(t) = x(0) + \int_0^t b(s, x(s))\, ds.$$

Analog können wir (1) interpretieren als

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\, dB_s.$$

Wir müssen also nur noch dem Integral bezüglich dB einen Sinn geben. Die Definition dieses stochastischen Integrals wird das erste große Ziel dieser Vorlesung sein.

Es gibt eine klassische Technik, das sogenannte *Lebesgue-Stieltjes* Integral, um Integrale bezüglich reellwertiger Funktionen zu definieren. Wir werden diese genauer in Kapitel 2 betrachten. Eine notwendige Voraussetzung um $\int \sigma\, dX$ in diesem Sinn zu definieren ist, dass der (rechtsstetige) Prozess X von (lokal) *beschränkter Variation* ist. D.h. es muss für jedes $t \geq 0$ gelten

$$\sup\Big\{ \sum_{i=1}^n |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| < \infty, \quad \{t_0 < t_1 < \dots t_n\} \text{ Partition von } [0,t] \Big\} < \infty.$$

Dies setzt also eine gewisse Regularität der Pfade von X voraus.

Problem 2: Die Pfade der Brown'schen Bewegung sind nicht von (lokal) beschränkter Variation.

Lösung 2: Allerdings existiert in einem geeigneten Sinne die *quadratische Variation*, also der Limes von

$$\sum_{i=1}^n |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2, \quad 0 = t_0 < \dots < t_n = t,$$

wenn $\max_k |t_{k+1} - t_k| \to 0$. Diesen Limes bezeichnen wir mit $\langle B\rangle_t$. In dem man die richtigen Eigenschaften von Martingalen ausnutzt, kann man zeigen, dass das Integral $\int_0^t \sigma_s\, dB_s$ als L^2-Limes von

$$\sum_k \sigma_{t_{k-1}}(B_{t_k\wedge t} - B_{t_{k-1}\wedge t}), \tag{2}$$

konstruieren kann, wenn $\max|t_{k+1} - t_k| \to 0$. Dabei ist folgendes wichtig:

- $t \mapsto \int_0^t \sigma_s\, dB_s$ ist wieder ein Martingal.
- $\mathbb{E}\big[\big(\int_0^t \sigma_s\, dB_s\big)^2\big] = \mathbb{E}\int_0^t \sigma_s^2\, d\langle B\rangle_s$.

Dieses Integral wird als *Itô-Integral* bezeichnet. Es verhält sich nicht wie z.B. ein Riemann Integral. Beispielsweise konvergieren

$$\sum_k \sigma_{t_k}(B_{t_k\wedge t} - B_{t_{k-1}\wedge t}) \quad \text{oder} \quad \sum_k \frac{1}{2}(\sigma_{t_{k-1}} + \sigma_{t_k})(B_{t_k\wedge t} - B_{t_{k-1}\wedge t}),$$

nicht gegen $\int \sigma_s\, dB_s$! Eine weitere Besonderheit des Itô-Integrals ist, dass die normale Kettenregel nicht mehr gilt. Stattdessen gilt die *Itô-Formel*:

$$df(B_t) = f'(B_t)\, dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)\, d\langle B\rangle_t.$$

Mit dieser Schreibweise meinen wir

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_t)\, dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, d\langle B\rangle_s.$$

Wir haben also gesehen wie man (im Prinzip) stochastischen Differentialgleichungen der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s,$$

einen Sinn geben kann. Etwas kürzer werden wir schreiben

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t.$$

Als Abschluss dieser Einleitung betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 0.1. *Modellierung eines Finanzmarkts.* Wenn man den Preis $(S_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ einer Aktie in diskreter Zeit modellieren will, kann man folgendes Modell betrachten:

$$S_{t+1} = S_t(1 + r + Y_{t+1}), \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen ist mit $\mathbb{E}[Y_0] = 0, \mathrm{Var}(Y_1) = \sigma^2$. Hier ist $r \geq 0$ die Zinsrate, σ steuert die Volatilität und Y_t modelliert die lokalen Fluktuationen im Markt. Da echte Finanzmärkte in stetiger Zeit funktionieren, möchte man die Anzahl der Handelszeitpunkte in einem festem Intervall gegen ∞ schicken. In stetiger Zeit erhält man dann bei geeigneter Skalierung der Parameter das Modell

$$dS_t = rS_t\, dt + \sigma S_t\, dB_t,$$

für $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung. Dies entspricht dem Black-Scholes Modell, das Sie möglicherweise aus der Vorlesung 'Finanzmathematik I' kennen. Wir werden sehen, dass die Gleichung durch $S_t = S_0 \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\}$ gelöst wird. Mit Hilfe des stochastischen Integrals kann man nun auch Handelsstrategien modellieren. Wenn man z.B. einen Anteil H_t an der Aktie S_t zur Zeit t hält (wobei H gewisse Bedingungen erfüllen muss), dann beschreibt

$$\int_0^t H_s\, dS_s,$$

das erzielte Vermögen.

Man kann das Modell aber noch verfeinern: Im Vergleich mit realen Aktienkursen sieht man schnell, dass eine konstante Volatilität nicht realistisch ist (Stichwort: Volatility smile). Stattdessen kann man σ vom Kurs (und auch von der Zeit) abhängen lassen und modelliert dann den Preis mit Hilfe von

$$dS_t = S_t r\, dt + \sigma(t, S_t) S_t\, dB_t$$

Mehr dazu werden Sie in der Vorlesung 'Höhere Finanzmathematik' im nächsten Semester lernen, die auf dieser Vorlesung aufbaut.

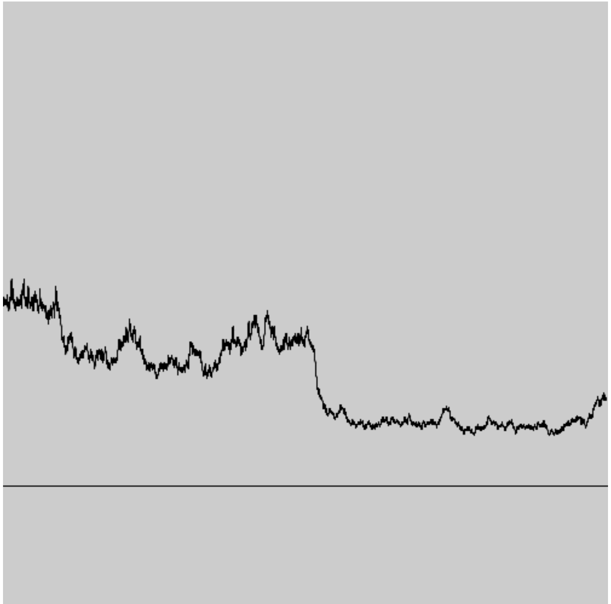

Abbildung 2: Eine Simulation des Black-Scholes Modells.

Beispiel 0.2. *Wright-Fischer Modell.* Ein grundlegendes Modell in der Evolutionsbiologie ist das Wright-Fischer Modell. Das ursprüngliche Modell wird wieder in diskreter Zeit formuliert. Gegeben sei eine Population von n Individuen (bzw. Gene), in der jedes Individuum zwei verschiedenen Typen a oder A annehmen kann. In der nächsten Generation (die aus n neuen Individuen besteht) sucht sich jeder eine Mutter uniform aus der vorherigen Generation aus und übernimmt deren Typ. Wir betrachten

$$X_t = \#\{\, \text{Individuen vom Typ } A \text{ zur Zeit } t \,\}.$$

Der Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Markovprozess mit der folgenden Dynamik. Gegeben dass $X_t = p$, dann ist X_{t+1} binomialverteilt mit Parameter n (Anzahl der Versuche) und $\frac{p}{n}$ (Erfolgswahrscheinlichkeit). Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}[X_{t+1} \,|\, X_t = p] = n\frac{p}{n} = p \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[(X_{t+1} - p)^2 \,|\, X_t = p\,] = n\frac{p}{n}(1 - \frac{p}{n}). \tag{3}$$

Also ist X_t ein Martingal, aber die Varianz der Inkremente hängt vom aktuellen Zustand ab. Nun möchte man häufig sehr große Populationen, also $n \to \infty$, betrachten. Um einen sinnvollen Grenzwert zu erhalten muss man die Zeit mit n skalieren und man geht über zum Anteil der A-Individuen in der Population, d.h. man definiert

$$X_t^n := \frac{1}{n} X_{\lfloor nt \rfloor}, \quad \text{und} \quad X_0^n = \frac{1}{n}\lfloor an \rfloor.$$

Dann kann man zeigen, dass $(X_t^n)_{t\geq 0}$ in einem geeigneten Sinn gegen $(Z_t)_{t\geq 0}$ konvergiert, Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ_t = \sqrt{Z_t(1 - Z_t)}\, dB_t \quad \text{mit } Z_0 = a.$$

Der Vorfaktor $\sqrt{Z_t(1-Z_t)}$ entspricht gerade der Varianz des Inkrements aus (3). Die Lösung dieser Gleichung bezeichnet man als *Wright-Fischer Diffusion*. Man kann sehen,

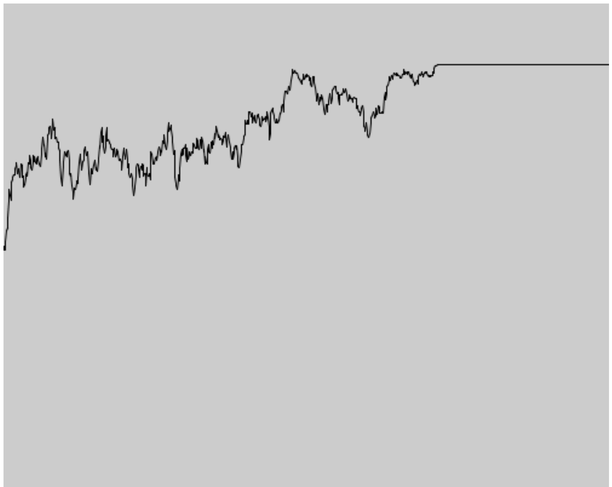

Abbildung 3: Eine Simulation des Wright-Fischer Modells. Man beachte, dass die Varianz viel größer ist wenn $X_t(1-X_t)$ maximal ist (also für $X_t \approx \frac{1}{2}$).

dass nach endlicher Zeit einer der beiden Typen ausstirbt, d.h. entweder es gibt eine (zufällige) Zeit T so dass $Z_t = 1$ oder $Z_t = 0$ für alle $t \geq T$. In der Biologie nennt man dieses Phänomen, dass die genetische Vielfalt auch ohne evolutionäre Vorteile (also z.B. Selektion) reduziert wird, 'genetic drift' (nicht zu verwechseln mit dem was wir später als Drift bezeichnen).

0.2 Literatur

Für den ersten Teil der Vorlesung werden wir uns eng an das Skript [Sch13] anlehnen. Als Ergänzung werden [KS91, Dur96] dienen. Das Thema 'stochastische Analysis' und der Itô-Ansatz ist ein klassisches Thema, also gibt es viele Darstellungen, siehe z.B. [Kle08, Kal02, RY99, RW00]. Ein Buch, welches die faszinierenden Pfadeigenschaft der Brown'sche Bewegung darstellt, ist [MP10]. In den letzten Jahren wurde unter dem Namen 'rough paths' sehr aktiv ein alternativer Ansatz zum Itô-Integral entwickelt, siehe [FH14].

0.3 Notation

Im Folgenden verwenden wir die folgende Notation. Diese Liste wird ständig aktualisiert.

$a \wedge b$	$:= \min\{a, b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$
$a \vee b$	$:= \max\{a, b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$
f^+	$= \max\{f, 0\}$ ist der Positivteil einer Abbildung.
f^-	$= \max\{-f, 0\}$ ist der Negativteil einer Abbildung.
$X \sim \mathcal{N}(a, b)$	X ist eine normalverteilte Zufallsvariable (mit Erwartungswert a und Varianz b).
$X \sim \mathrm{Exp}(a)$	X ist exponentialverteilt, d.h. $\mathbb{P}\{X > x\} = e^{-ax}$ für alle $x \geq 0$.
$\lfloor a \rfloor$	$:= \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$, ganzzahliger Anteil von $a \in \mathbb{R}$.

Kapitel 1

Prozesse, Filtrationen und Martingale

Dieses Kapitel folgt sehr eng [Sch13, Chapter 1].

1.1 Stochastische Prozesse in stetiger Zeit

Definition 1.1. Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Räum und I eine (nicht-leere) Indexmenge. Ein (E-wertiger) *stochastischer Prozess* ist eine Familie $X = (X_t)_{t \in I}$ von messbaren Abbildungen X_t, die von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $(E, \mathcal{E})$ abbilden. E wird auch als *Zustandsraum* bezeichnet.

Bemerkung 1.2. Häufig ist E ein metrischer Raum (oder zumindest ein topologischer Raum) und dann ist $\mathcal{E}$ die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$ (also die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält). In vielen Beispielen ist $E = \mathbb{R}^d$ und dann natürlich $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Für Intervalle $[a, b]$ schreiben wir $\mathcal{B}[a, b] := \mathcal{B}([a, b])$. In dieser Vorlesung interessieren wir uns vor allem für den Fall, dass $I = [0, \infty)$. Dann interpretieren wir t als *Zeitvariable.*

Zur Erinnerung: wir sagen eine Abbildung $X : \Omega \to E$ ist $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-messbar, wenn für alle $A \in \mathcal{E}$,

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \in A\} = \{X \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Ist $E = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) dann verzichten wir häufig auf die explizite Nennung von $\mathbb{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und sprechen von einer $\mathcal{F}$-messbaren Abbildung. Warum ist diese Definition wichtig? Wenn wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ gegeben haben, dann möchten wir natürlich Ereignissen der Form $\{X \in A\}$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\{X \in A\}$ zuordnen können und dazu muß $\{X \in A\}$ in $\mathcal{F}$ sein! Wenn $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, dann wird die messbare Abbildung auch als Zufallsvariable bezeichnet.

Wir möchten die Abbildung $\Omega \to E^I, \omega \mapsto X(\omega) := (X_t(\omega))_{t\in I}$ als Zufallsvariable (d.h. messbare Abbildung) interpretieren. Dazu definieren wir als σ-Algebra auf E^I die *Produkt-σ-Algebra* $\mathcal{E}^I$. Dies ist die kleinste σ-Algebra auf E^I, so dass für jedes $i \in I$ die Projektion $\pi_i : E^I \to E$ $\pi(x) = x_i, x \in E^I$ messbar ist. Man kann dann leicht überprüfen, dass dann $\omega \mapsto X(\omega)$ $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^I)$-messbar ist.

Definition 1.3. X sei ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in E. Die *Verteilung* von X ist definiert als $\mathbb{P}_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$, d.h.

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}\{X \in A\}, \quad \text{für } A \in \mathcal{E}^I.$$

$\mathbb{P}_X$ ist dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$.

Bemerkung 1.4. Die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{E}^I$ ist allerdings eher grob. So können Mengen in $\mathcal{E}^I$ nur von Auswertungen für abzählbar viele $t \in I$ abhängen, siehe z.B. [Kle08, Kap. 14.1]. Beispielsweise sind für $I = [0,1], E = \mathbb{R}$ die Mengen

$$\{f \,:\, t \mapsto f(t) \text{ ist stetig}\},$$

oder auch die Menge

$$\{f \,:\, \sup_{x\in[0,1]} f(x) \leq 1\}$$

nicht in $\mathcal{E}^I$.

Mit Hilfe der Verteilung können wir zwei stochastische Prozesse X und Y mit gleichem Zustandsraum E vergleichen, wobei diese aber möglicherweise auf unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsräumen definiert sind. Da aber die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{E}^I$ so grob ist, gibt uns $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ nur begrenzte Informationen: wissen wir beispielsweise dass X stetige Pfade hat (also $t \mapsto X_t(\omega)$ ist stetig für alle ω), dann folgt daraus nicht dass Y stetige Pfade hat.

Wir haben also gesehen, dass die Verteilung nur begrenzte Informationen über X liefert. Wenn wir zwei stochastische Prozesse $X = (X_t)_{t\in I}$ und $Y = (Y_t)_{t\in I}$ jeweils definiert auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und mit Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$ vergleichen wollen, dann könnten wir für Gleichheit verlangen, dass $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für alle t und ω gelten soll. Dies ist eine eher starke Bedingung, die wir mit Hilfe des $\mathbb{P}$ auf verschiedene Arten abschwächen können.

Definition 1.5. Gegeben seien zwei stochastische Prozesse $(X_t)_{t\in I}$ und $(Y_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit gleicher Indexmenge I und Wertebereich $(E, \mathcal{E})$.

(i) X ist eine *Modifikation* von Y wenn gilt: für alle $t \geq 0$, $\mathbb{P}\{X_t = Y_t\} = 1$.

(ii) X und Y sind *ununterscheidbar* (engl. indistinguishable) wenn

$$\mathbb{P}\{\omega \,:\, X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ für alle } t \geq 0\} = 1.$$

Bemerkung 1.6. (a) Eigentlich ist die Definition etwas unpräzise. Genauer sollte (i) heißen: für jedes $t \geq 0$ gibt es $N_t \in \mathcal{F}$ mit

$$\{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \subseteq N_t \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(N_t) = 0.$$

Analog müßte auch (ii) modifiziert werden. Die etwas umständliche Formulierung ist erforderlich, weil $\{X_t = Y_t\}$ nicht unbedingt messbar sein muss. Dies kann nur auftreten, wenn $(E, \mathcal{E})$ entsprechend degeneriert ist. Wir haben kein Problem wenn $E = \mathbb{R}^d, \mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

(b) Wenn X und Y Modifikationen sind, dann gilt $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ (*ohne Beweis*).

(c) Wenn X und Y ununterscheidbar sind, dann sind X, Y Modifikationen voneinander. *Übungsaufabe!*

(d) Wenn X und Y Modifikationen voneinander sind und I ist abzählbar, dann sind X und Y ununterscheidbar. Für I überabzählbar gilt diese Aussage nicht, wie das nächste Beispiel zeigt. *Übungsaufabe!*

Beispiel 1.7. Gegeben einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sei U eine uniform-verteilte Zufallsvariable auf $[0, 1]$. Wir definieren zwei stochastische Prozesse mit Indexmenge $I = [0, 1]$ und Zustandsraum $E = [0, 1]$: für alle $t \in [0, 1]$ und $\omega \in \Omega$ sei

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t = U(\omega), \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases} \qquad Y_t(\omega) = 0.$$

Dann sind X und Y Modifikationen voneinander, aber nicht ununterscheidbar. Denn es gilt für jedes $t \geq 0$

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t\} = \mathbb{P}\{U \neq t\} = 1.$$

Aber

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t \text{ für alle } t \in [0, 1]\} = 0.$$

Wenn man X zu einer deterministischen Zeit umdefiniert, dann erhält man auch keine Modifikation mehr.

Von nun an nehmen wir an, dass $I = [0, \infty)$. Damit kann man einen stochastischen Prozess auch als Abbildung $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ betrachten und nach Messbarkeit (gemeinsam in beiden Variablen (ω, t)) fragen.

Definition 1.8. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt *messbar*, wenn die Abbildung

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

von $([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F})$ nach $(E, \mathcal{E})$ messbar ist. D.h. wenn für alle $A \in \mathcal{E}$,

$$X^{-1}(A) = \{(t, \omega) : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}.$$

Nach dem Satz von Fubini sind auch die Projektionen auf die jeweiligen Koordinaten messbar. D.h. die Pfade $t \mapsto X_t(\omega)$ eines messbaren Prozess sind Borel-messbare Abbildungen für alle $\omega \in \Omega$. Das gleiche gilt auch für die Abbildung $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$. Wenn also X Zustandsraum $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ hat, können wir ohne Probleme Integrale definieren. Etwas konkreter: Ist $I \subset [0, \infty)$ ein Teilintervall, so dass $\int_I \mathbb{E}|X_t|\, dt < \infty$, dann ist auch

$$\int_I |X_t|\, dt < \infty \quad \text{f.s.} \quad \text{und} \quad \int_I \mathbb{E} X_t\, dt = \mathbb{E} \int_I X_t\, dt.$$

In der Praxis werden die stochastischen Prozesse, die wir betrachten, häufig eine noch stärkere Eigenschaft erfüllen, siehe die folgende Proposition 1.25

Definition 1.9. Für ein festes $\omega \in \Omega$ nennen wir die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ einen *Pfad*. So sagen wir z.B., dass ein reellwertiger Prozess X fast sicher stetige Pfade hat, wenn es $N \in \mathcal{F}$ gibt mit $\mathbb{P}(N) = 0$ und

$$t \mapsto X_t(\omega) \text{ ist stetig für alle } \omega \in \Omega \setminus N.$$

1.2 Filtrationen und Stoppzeiten

Wie auch bei diskreten Martingalen in WT1 modellieren wir die Informationen, die wir im Laufe der Zeit über einen stochastischen Prozess erhalten, mit Hilfe von Filtrationen.

Definition 1.10. Gegeben einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nennen wir eine Familie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration, wenn

(i) für alle $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ ist,

(ii) $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $0 \leq s \leq t$.

In diesem Fall nennen wir $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ einen *filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* (FWR).

Definition 1.11. Ein $(E, \mathcal{E})$-wertiger stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ heißt *adaptiert* falls für jedes $t \geq 0$, X_t $(\mathcal{F}_t, \mathcal{E})$-messbar ist, d.h. wenn für alle $A \in \mathcal{E}$,

$$X_t^{-1}(A) = \{X_t \in A\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Bemerkung 1.12. Gegeben einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kann man immer die *Filtration erzeugt von* X (oder die *natürliche Filtration*) $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ betrachen, welche definiert ist als

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s \,:\, 0 \leq s \leq t).$$

Natürlich ist X bezüglich dieser Filtration adaptiert.

Definition 1.13. Für einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ definieren wir

$$\mathcal{F}_t^+ := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \quad \text{für } t \geq 0,$$

und $\mathbb{F}^+ := (\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$. Gilt $\mathbb{F} = \mathbb{F}^+$, dann nennen wir die Filtration *rechtsstetig*.

Definition 1.14. Wir sagen, dass ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ die *üblichen Bedingungen* erfüllt, wenn

(i) $\mathcal{F}_0$ alle $\mathbb{P}$-Nullmengen enthält. D.h. jede Menge $A \subset \Omega$ für die es ein $N \in \mathcal{F}$ gibt mit $A \subset N$ und $\mathbb{P}(N) = 0$ muss $A \in \mathcal{F}_0$ erfüllen.

(ii) die Filtration rechtsstetig ist, d.h. $\mathbb{F} = \mathbb{F}^+$.

Bemerkung 1.15. (i) Unter der Bedingung (i) gilt, dass alle $\mathbb{P}$-Nullmengen N auch in $\mathcal{F}_t$ liegen für alle $t \geq 0$. Falls wir also einen Prozess auf einer Nullmenge umdefinieren, verlieren wir so z.B. nicht die $\mathbb{F}$-Adaptiertheit. Die Nützlichkeit von Bedingung (ii) wird gleich in Bemerkung 1.17 deutlich.

(ii) Hat man einen stochastischen Prozess X auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konstruiert, dann gibt es einen kanonischen Weg zu einer Filtation, die die üblichen Bedingugen erfüllt:

(a) Zunächst betrachtet man die von X erzeugte Filtration, also

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t).$$

(b) Man fügt die $\mathbb{P}$-Nullmengen hinzu:

$$\mathcal{F}_t' = \sigma(\tilde{\mathcal{F}}_t, N \subset \Omega, N \text{ eine } \mathbb{P} - \text{Nullmenge}).$$

(b) Man geht über zur rechtsstetigen Erweiterung:

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s'.$$

Schließlich hat man einen Prozess auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, wobei die Filtration den üblichen Bedingungen genügt (wobei $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_\infty$ erweitert wird).

Definition 1.16. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtierter Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ heißt *($\mathbb{F}$-)Stoppzeit* wenn für alle $t \geq 0$,

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Die Abbildung τ heißt *schwache Stoppzeit* (oder *Optionzeit*) wenn für alle $t \geq 0$,

$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Bemerkung 1.17. Jede Stoppzeit ist auch eine schwache Stoppzeit. Ist die Filtration rechtsstetig, dann gilt auch die Umkehrung und jede schwache Stoppzeit ist eine Stoppzeit. Denn man kann leicht zeigen, dass $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle t genau dann, wenn τ eine $\mathbb{F}^+$-Stoppzeit ist.

Definition 1.18. Ist τ eine Stoppzeit, dann definieren wir

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty \,:\, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\},$$

die *σ-Algebra der τ-Vergangenheit.*

Lemma 1.19. *Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und τ und σ $\mathbb{F}$-Stoppzeiten. Dann gilt*

(i) $\mathcal{F}_\tau$ ist eine σ-Algebra.

(ii) Wenn $\tau(\omega) = s$ für alle $\omega \in \Omega$, dann ist $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_s$.

(iii) τ ist $\mathcal{F}_\tau$-messbar.

(iv) Wenn $0 \leq \sigma \leq \tau$, dann gilt $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

(v) Wenn $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten ist, dann sind $\overline{\sigma} := \sup_n \sigma_n$ und $\underline{\sigma} := \inf_n \sigma_n$ schwache Stoppzeiten.

(vi) Es gilt $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

Beweis. Übungsaufgabe □

Typische Beispiele für Stoppzeiten sind erste Eintrittszeiten in bestimmte Mengen.

Definition 1.20. Sei X ein $(E, \mathcal{E})$-wertiger, adaptierter stochastischer Prozess auf einem FWR $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ und $G \subseteq E$. Die Abbildung

$$T^G(\omega) := \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t(\omega) \in G\},$$

heißt *Eintrittszeit* von X in G.

Proposition 1.21. *Es gelten die Voraussetzungen wie in Definition 1.20. Angenommen der Zustandsraum E ist ein metrischer Raum (mit Metrik d) und $\mathcal{E}$ die Borel-σ-Algebra, dann gilt*

(i) Ist $G \subseteq E$ offen und X hat rechts- oder linksstetige Pfade, dann ist T^G eine schwache Stoppzeit.

(ii) Wenn $G \subseteq E$ abgeschlossen ist und X hat stetige Pfade, dann ist T^G eine Stoppzeit.

Insbesondere sind bei einer rechtsstetigen Filtration (also z.B. unter den üblichen Bedingungen) T^G sowohl für offene als auch abgeschlossene Mengen G Stoppzeiten, wenn X stetige Pfade hat.

Beweis. (i) Wir nehmen an, dass $t \mapsto X_t(\omega)$ rechtsstetig ist (das Argument für linksstetige Pfade ist analog). Es gilt für $t > 0$

$$\{T^G < t\} = \bigcup_{0 \le s < t} \{X_s \in G\}.$$

Wir behaupten, dass, da die Pfade rechtsstetig sind und G offen ist,

$$\bigcup_{0 \le s < t} \{X_s \in G\} = \bigcup_{0 \le s < t, s \in \mathbb{Q}} \{X_s \in G\}.$$

$\supseteq$ ist klar. Also zeigen wir noch $\subseteq$. Es sei also $\omega \in \{X_s \in G\}$ für ein $s \in (0,t)$. D.h. also $X_s(\omega) \in G$. Da G offen ist gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass $\{y : d(y, X_s(\omega)) < \varepsilon\} \subseteq G$. Wegen der Rechtsstetigkeit von $t \mapsto X_t(\omega)$, gibt es nun ein $s' \in (s,t)$ so dass $d(X_{s'}(\omega), X_s(\omega)) < \varepsilon$, damit ist $X_{s'} \in G$ und $\omega \in \{X_{s'} \in G\}$ wie gefordert.

Daraus können wir schließen, dass

$$\{T^G < t\} = \bigcup_{0 \le s < t, s \in \mathbb{Q}} \{X_s \in G\} \in \mathcal{F}_t,$$

(da $G \in \mathcal{E}$ und X_s messbar).

(ii) Wir betrachten $G_n = \{y : d(y,G) < \frac{1}{n}\}$. Dann ist G_n offen. Weiterhin behaupten wir, dass $T^{G_n} < T^G$ auf der Menge $\{T^G \in (0,\infty)\}$. Zunächst bemerken wir, dass, da G abgeschlossen und der Pfad rechtsstetig ist, gelten muss $X_{T^G} \in G$ auf $\{T^G < \infty\}$. Ist nun $T^G \in (0,\infty)$, dann folgt dass $T^{G^n} < T^G$. Denn nach Definition gilt für alle $s < T^G$, dass $X_s \notin G$. Wegen der Linksstetigkeit gibt es aber für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $s' \in (0, T^G(\omega))$ so dass $d(X_s'(\omega), X_{T^G}(\omega)) < \frac{1}{n}$. Da $X_{T^G} \in G$, folgt also $X_{s'} \in G^n$ und somit $T^{G^n} < T^G$.

Offensichtlich ist T^{G^n} ein nicht-fallende Folge, es gibt also ein $T \le T^G$ so dass $T(\omega) = \lim_{n\to\infty} T^{G^n}(\omega)$. Wegen der Stetigkeit und da G abgeschlossen, muss $T(\omega) = T^G(\omega)$ sein für alle ω. Also bekommen wir

$$\{T^G \le t\} = \bigcap_n \{T^{G_n} < t\} \in \mathcal{F}_t,$$

da T^{G_n} eine schwache Stoppzeit ist wegen (i). □

Wir kommen nochmals zurück zu den Messbarkeitseigenschaften des Prozesses X. Damit sich der Prozess zu Stoppzeiten so wie erwartet verhält, brauchen wir noch eine stärkere Eigenschaft als die (Produkt-)Messbarkeit aus Definition 1.8.

Definition 1.22. Ein stochastischer Prozess X heißt *progressiv messbar* bezüglich $\mathbb{F}$, wenn für jedes $t \geq 0$ und $A \in \mathcal{E}$,

$$\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \, : \, X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t.$$

Mit anderen Worten: der Prozess $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ von $[0,t] \times \Omega \to E$ ist $(\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t)$–$\mathcal{E}$ messbar.

Bemerkung 1.23. Offensichtlich ist ein Prozess, der progressiv messbar ist sowohl messbar als auch adaptiert. Der Umkehrschluß: messbar und adaptiert $\Longrightarrow$ progressiv messbar gilt nicht, siehe [Sch13, Example 1.38]. Allerdings kann man zeigen, dass ein stochastischer Prozess, der messbar und $\mathbb{F}$-adaptiert ist, eine progressiv messbare Modifikation hat. Dies ist allerdings nicht einfach zu beweisen (vgl. [Mey66, p. 68]). Wir benötigen dieses Resultat nicht direkt, denn wir können einen relevanten Speziallfall gleich in Proposition 1.25 einfach beweisen.

Proposition 1.24. *Es sei X ein $(E,\mathcal{E})$-wertiger progressiv messbarer stochastischer Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ und T eine Stoppzeit.*

(i) $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ ist $\mathcal{F}_T$ messbar, d.h. für jedes $B \in \mathcal{E}$, gilt

$$\{\omega \, : \, T(\omega) < \infty \text{ und } X_{T(\omega)}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_T.$$

(ii) Der Prozess $(X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ ist progressiv messbar. Hier ist $s \wedge t := \min\{s,t\}$.

Beweis. Wir fixieren $t \geq 0$ und betrachten die Abbildung $\phi : \omega \to (T(\omega) \wedge t, \omega)$. Wenn wir X als Abbildung $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ interpretieren, dann ist also $X_{T\wedge t} = X \circ \phi$. Wir behaupten ϕ ist $(\mathcal{F}_t, \mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t)$-messbar, denn für $0 \leq a \leq t$ und $A \in \mathcal{F}_t$ gilt

$$\phi^{-1}([a,t] \times A) = \{\omega \, : \, \phi(\omega) \in [a,t]\} \times A = \{T \wedge t \in [a,t]\} \cap A = \{T \geq a\} \cap A \in \mathcal{F}_t.$$

Außerdem erzeugen Mengen der Form $[a,t] \times A$ die σ-Algebra $\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t$.

Insbesondere ist also $\omega \mapsto X_{T(\omega)\wedge t}(\omega) = X \circ \phi(\omega)$ als Verknüpfung $(\mathcal{F}_t, \mathcal{E})$-messbar (nach Definition von progressiv messbar ist $X : [0,t] \times \Omega \to E$ $(\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{F}_t, \mathcal{E})$-messbar und wir haben gezeigt ϕ ist $(\mathcal{F}_t, \mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t)$-messbar).

Daraus folgt, dass für $B \in \mathcal{E}$,

$$\{T < \infty, X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{X_{T\wedge t} \in B\} = \{T \leq t\} \cap \{X \circ \phi \in B\} \in \mathcal{F}_t,$$

ausserdem ist

$$\{T < \infty, X_T \in B\} = \bigcup_{n\geq 1} \{T \leq n, X_T \in B\} \in \mathcal{F}_\infty.$$

was die zweite Bedingung überprüft, so dass $\{T < \infty, X_T \in B\} \in \mathcal{F}_T$.

(ii) Analog. $\square$

Proposition 1.25. *Der stochastische Prozess X nehme Werte in einem metrischen Raum (E,d) an. Wenn X rechts- oder linksstetige Pfade hat und adaptiert ist, dann ist X progressiv messbar.*

Für den Beweis brauchen wir ein Lemma, welches vielleicht schon aus der WT-Vorlesung bekannt ist.

Lemma 1.26. *Wenn (E,d) ein metrischer Raum ist mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{E}$ und $Z_n : (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) \to (E, \mathcal{E})$ eine Folge von messbaren Funktionen und $\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = Z(\omega)$ für alle $\omega \in \tilde{\Omega}$, dann ist Z auch messbar.*

Beweis von Prop. 1.25. Wir nehmen an, dass X rechtsstetig und adaptiert ist. Für festes $t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Approximation von X als

$$X_s^n := \begin{cases} X_{\frac{k+1}{2^n}t}, & s \in [\frac{k}{2^n}t, \frac{k+1}{2^n}t),\ 0 \leq k < 2^n, \\ X_t & s = t. \end{cases}$$

Für $B \in \mathcal{E}$ gilt dann

$$\begin{aligned} &\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \,:\, X_s^n(\omega) \in B\} \\ &\quad = \bigcup_{0 \leq k < 2^n} \Big(\big[\tfrac{k}{2^n}t, \tfrac{k+1}{2^n}t\big) \times \{X_{\frac{k+1}{2^n}t}(\omega) \in B\} \Big) \cup (\{t\} \times \{X_t(\omega) \in B\}) \in \mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

D.h. die Abbildung $X^n : [0,t] \times \Omega \to E$ ist $(\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t, \mathcal{E})$-messbar.

Wegen der Rechtsstetigkeit folgt, dass $X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_t^n(\omega)$ für alle t und ω. Nach Lemma 1.26 (mit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) = ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}))$ ist also auch X als Abbildung von $[0,t] \times \Omega \to E$ $(\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t, \mathcal{E})$-messbar (und damit progressiv messbar).

Ist X linksstetig, muss oben eine anloge Approximation (mit Auswertung am linken Intervallrand, also $X_{\frac{k}{2^n}t}$) gewählt werden. □

Bemerkung 1.27. Wenn die Filtration $\mathbb{F}$ die üblichen Bedingung erfüllt und X fast sicher stetige Pfade hat, dann können wir ohne größere Einschränkung annehmen, dass $t \mapsto X_t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ stetig ist. Schließlich können wir das ursprüngliche X immer auf einer Nullmenge umdefinieren. Der neue Prozess ist auch adaptiert (da Nullmengen bereits in $\mathcal{F}_0$ liegen). Deshalb werden wir in Zukunft häufig von stetigen Prozessen reden (womit wir meinen, dass die Pfade stetig sind), aber mit etwas Vorsicht lassen sich die entsprechenden Aussage auch auf Prozesse, die fast sicher stetige Pfade haben, übertragen.

1.3 Martingale

Die Bedeutung von Martingale in der Stochastik lassen sich im Wesentlich auf drei Eigenschaften zurückführen: erstens lassen sich Maxima gut abschätzen, zweitens es gilt der Optional Sampling Satz und schließlich konvergieren sie unter geeigenten (und leicht zu überprüfenden) Bedingugen.

Für dieses Teilkapitel arbeiten wir immer auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

Definition 1.28. Ein reellwertiger stochastischer Prozess $M = (M_t)_{t\geq 0}$ heißt ein $\mathbb{F}$-*Martingal* wenn

(i) $(M_t)_{t\geq 0}$ ist adaptiert,

(ii) $\mathbb{E}|M_t| < \infty$ für alle $t \geq 0$,

(iii) Für jedes $0 \leq s \leq t$ gilt

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s \quad \text{fast sicher.} \tag{1.1}$$

Gilt in (1.1) $\geq$, dann heißt M ein $\mathbb{F}$-Submartingale, während wenn $\leq$ gilt, M als $\mathbb{F}$-*Supermartingal* bezeichnet wird.

Wie in der Einleitung erwähnt ist das Beispiel für ein stetiges Martingal die Brown'sche Bewegung.

Definition 1.29. Ein $\mathbb{F}$-adaptierter reellwertiger Prozess B heißt (standard) $\mathbb{F}$-*Brown'sche Bewegung* gestartet in $x \in \mathbb{R}$, wenn gilt

(i) $B_0 = x$ fast sicher.

(ii) Für alle $0 \leq s \leq t$ ist das Inkrement $B_t - B_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$.

(iii) Für alle $0 \leq s \leq t$ ist das Inkrement normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$, d.h. $\mathcal{L}(B_t - B_s) = \mathcal{N}(0, t - s)$.

(iv) B hat stetige Pfade.

Erwähnen wir den Startpunkt x nicht, so gilt $x = 0$.

Wir werden zunächst nicht beweisen, dass ein solcher Prozess existiert. Ein elementarer Beweis geht zurück auf N. Wiener, siehe auch [MP10, Thm. 1.3].

Lemma 1.30. *(i) $(B_t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal.*

(ii) $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ *ist ein Martingal.*

Beweis. (i) Adaptiertheit folgt aus der Definition. B_t ist normalverteilt $\mathcal{N}(0,t)$, damit ist $\mathbb{E}|B_t| < \infty$ für alle t. Weiter gilt wenn wir erst nutzen dass das Inkrement unabhängig von der Vergangenheit ist und schließlich dass es zentriert ist:

$$\mathbb{E}[B_t \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s \,|\, \mathcal{F}_s] + B_s = \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = 0 + B_s = B_s.$$

Damit haben wir die 3 Eigenschaften überprüft.

(ii) *Übungsaufgabe.* □

Proposition 1.31. *B sei eine standard Brown'sche Bewegung. Dann gelten*

(i) Für jedes $s > 0$, *ist der Prozess* $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ *wieder eine Brownsche Bewegung bezüglich der Filtration* $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+s}$. *(die unabhängig ist von* $\sigma(B_u, u \leq s)$*).*

(ii) $(-B_t)_{t\geq 0}$ *ist auch eine Brown'sche Bewegung.*

(iii) Skalierungseigenschaft: *Für jedes* $c > 0$, *ist* $(cB_{t/c^2})_{t\geq 0}$ *wieder eine Brown'sche Bewegung.*

(iv) Der Prozess X *definiert durch* $X_0 = 0$ *und* $X_t = tB_{1/t}$ *für* $t > 0$ *ist eine Brown'sche Bewegung.*

Beweis. (i) Definiere $\tilde{B}_t = B_{t+s} - B_s$. Dann gilt $\tilde{B}_0 = 0$. Weiter ist $\tilde{B}_{t_2} - \tilde{B}_{t_1} = B_{t_2+s} - B_{t_1+s}$. Nach Definition ist dieses Inkrement unabhängig von $\tilde{\mathcal{F}}_{t_2}$. Außerdem hat es die Verteilung $\mathcal{N}(0, (t_2+s) - (t_1+s)) = \mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$. Die Stetigkeit von $\tilde{B}$ folgt direkt aus der Stetigkeit von B.

(ii)-(iv) *Übungsaufgaben.* □

Auch wenn wir in dieser Vorlesung hauptsächlich stetige Martingale betrachten, werden wir dennoch ein Beispiel kennenlernen, dass nur rechtsstetig ist. Meistens fordert man für solche Prozesse sogar, dass die linksseitigen Grenzwerte $X_{t-} = \lim_{s\uparrow t} X_s$ existieren. Rechsstetige Prozesse mit linkkseitigen Grenzwerten werden auch als *càdlàg* bezeichnet (von frz. 'continue à droite, limite à gauche').

Definition 1.32. Ein $\mathbb{F}$-*Poissonprozess* mit Intensität $\lambda > 0$ ist ein adaptierter, $\mathbb{N}_0$-wertiger Prozess $N = \{N_t\}$, so dass

(i) $N_0 = 0$ fast sicher,

(ii) $N_t - N_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$,

(iii) $N_t - N_s$ ist Poissonverteilt mit Erwartungswert $\lambda(t-s)$,

(iv) die Pfade sind càdlàg.

Bemerkung 1.33. *Konstruktion des Poissonprozesses.* Ein Poissonprozess kann man wie folgt konstruieren. Es seien $\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von exponentialverteilten Zufallsvariablen (mit Parameter $\lambda > 0$). Dies sollen die Wartezeiten zwischen den Sprüngen des Prozesses darstellen. Also definieren wir als $T_n = \sum_{k=1}^n W_k$ die Zeitpunkte der Sprünge. Schließlich sei die Sprunghöhe immer 1 und damit definiert

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}_0, T_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}, \tag{1.2}$$

die Anzahl der Sprünge bis zur Zeit t. Wenn $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die von $(N_t)_{t\geq 0}$ erzeugte Filtration bezeichnet, dann kann man zeigen, dass $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Poissonprozess ist (bezgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$). Die Rechtsstetigkeit sieht man schnell aus der zweiten Darstellung in (1.2).

Lemma 1.34. *(N_t) sei ein Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$. Der* kompensierte Poissonprozess *$(N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal.*

Beweis. Analog zu dem Beweis von Lemma 1.30 (i). □

Die grundlegenden Eigenschaften für zeitstetige Martingale werden aus denen für zeitdiskrete Martingale durch Approximation hergeleitet.

Lemma 1.35 (Optional Sampling, zeitdiskret)**.** *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Submartingal und seien $\sigma \leq \tau$ beschränkte Stoppzeiten, d.h. es gibt ein (deterministisches) $T \in \mathbb{R}^+$ so dass $\sigma \leq \tau \leq T$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Außerdem gilt Gleichheit wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist.

Beweis. Wir nehmen an, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist. Der allgemeine Fall folgt dann relativ einfach aus der Doob'schen Zerlegung. Außerdem sei Bedinung (a) erfüllt. Wir zeigen zunächst, dass für jede Stoppzeit $\sigma \leq T$ fast sicher gilt

$$\mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma. \tag{1.3}$$

Dazu sei $A \in \mathcal{F}_\sigma$, dann gilt mit der Martingaleigenschaft und schließlich der Turmeigenschaft

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_\sigma \mathbb{1}_A] &= \sum_{k=1}^{T} \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\sigma=k\}}] = \sum_{k=1}^{T} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_k] \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\sigma=k\}}\big] \\ &= \sum_{k=1}^{T} \mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\sigma=k\}}] = \mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_A].\end{aligned}$$

Da X_σ $\mathcal{F}_\sigma$-messbar ist, folgt daraus (1.3).

Die allgemeine Aussage folgt nun, da $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ (nach Lemma 1.19) mit der Turmeigenschaft und mit (1.3) (zweimal)

$$\mathbb{E}[X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_\tau] \,|\, \mathcal{F}_\sigma\big] = \mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma,$$

fast sicher. □

Wir sagen, dass ein $\mathbb{F}$-Submartingal *auf* $[0,\infty]$ *erweitert* werden kann, wenn es eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare L^1-integrierbare Zufallsvariable X_∞ gibt, so dass $X_t \leq \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t]$ f.s..

Satz 1.36 (Optional Sampling Theorem, zeitstetig)**.** *Gegeben sei X ein rechsstetiges $\mathbb{F}$-Submartingal, welches auf $[0,\infty]$ erweitert werden kann. Wenn $S \leq T$, $\mathbb{F}$-Stoppzeiten sind, dann gilt fast sicher*

$$\mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_S] \geq X_S \quad \textit{und} \quad \mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_S^+] \geq X_s.$$

Für Martingale kann $\geq$ durch $=$ ersetzt werden.

Bemerkung 1.37. Die Bedingung des Satzes sind insbesondere erfüllt, wenn $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges Submartingal ist und die Stoppzeiten beschränkt sind, d.h. $\sigma \leq \tau \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$. Denn dann können wir den Satz anwenden auf das gestoppte Submartingal $X^M = (X_{t\wedge M})_{t\geq 0}$ und nach Annahme gilt $X_\tau = X^M_\tau$ und $X_\sigma = X^M_\sigma$. Weiterhin kann X^M auf $[0,\infty]$ erweitert werden, denn es gilt für alle $t \leq M$,

$$X^M_t = X_t \leq \mathbb{E}[X_M \,|\, \mathcal{F}_t],$$

und für $t \geq M$ ist $X^M_t = X_M$, so dass wir $X^M_\infty = X_M$ setzten können, welches integrierbar ist.

Beweis. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{wenn } \tau(\omega) \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) \text{ für } k \in \{1,\dots,n2^n\} \\ \infty & \text{wenn } \tau(\omega) \geq n \end{cases}$$

und analog approximieren wir σ durch σ_n. Dann gilt, dass $\sigma_n \leq \tau_n$ und beide haben endlichen Wertebereich

$$I_n = \left\{\tfrac{k}{2^n}\,,\, k \in \{1,\dots,n2^n\}\right\} \cup \{\infty\}.$$

Dann ist $(X_t)_{t\in I_n}$ ein Submartingal und τ_n, σ_n Stoppzeiten bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I_n}$. Das zeitdiskrete Optional Sampling, Lemma 1.35(a) besagt, dass

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} \,|\, \mathcal{F}_{\sigma_n}] \geq X_{\sigma_n}.$$

Nun gilt $\tau_n \downarrow \tau$ und $\sigma_n \downarrow \sigma$ fast sicher für $n \to \infty$ und aus der Rechtsstetigkeit folgt $X_\tau = \lim_{n\to\infty} X_{\tau_n}$ und $X_\sigma = \lim_{n\to\infty} X_{\sigma_n}$. D.h. für jedes $A \in \mathcal{F}_{\sigma_n}$ (und da $\sigma < \sigma^n$ auf $\{\sigma < \infty\}$ auch für jedes $A \in \mathcal{F}_\sigma^+$ und $A \in \mathcal{F}_\sigma$),

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} \mathbb{1}_A] \geq \mathbb{E}[X_{\sigma_n} \mathbb{1}_A].$$

Zum Abschluß müssen wir also nur noch zeigen, dass wir den Grenzwert $n \to \infty$ mit dem Erwartungswert vertauschen können. Dazu kann man zeigen, dass die Familien $\{X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{X_{\sigma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar sind. Wir verzichten hier auf einen Beweis und verweisen auf [KS91], Chapter 1, Thm. 3.22 und Problem 3.11. □

Korollar 1.38. *(i) Ein rechtsstetiges $\mathbb{F}$-(Sub-)Martingal X ist auch ein $\mathbb{F}^+$-(Sub-)Martingal.*

(ii) Optional Stopping. *Wenn X ein rechtsstetiges Martingal ist und T eine Stoppzeit, dann ist der gestoppte Prozess $X_t^T := X_{t\wedge T}$ ein $(\mathcal{F}_{t\wedge T})_{t\geq 0}$- und ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal.*

Beweis. (i) Zunächst bemerken wir, dass wegen der Rechtssteigkeit

$$X_t = \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s,$$

und damit ist X $\mathbb{F}^+$-adaptiert. Die Martingaleigenschaft bezüglich $(\mathcal{F}_t^+)$ folgt aus Satz 1.17 zusammen mit Bemerkung 1.37.

(ii) Für T eine Stoppzeit und $0 < s < t$ sind $s\wedge T \leq t\wedge T$ durch t beschränkte Stoppzeiten und damit folgt aus Satz 1.36 und Bemerkung 1.37, dass

$$\mathbb{E}[X_{t\wedge T} \,|\, \mathcal{F}_{s\wedge T}] = X_{s\wedge T},$$

und damit der erste Teil der Aussage.

Um zu zeigen, dass X^T ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ Martingal ist, seien wieder $s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Dann gilt für $u > 0$

$$A \cap \{s < T\} \cap \{\tau \wedge s \leq u\} = A \cap \{s \leq u\} = \begin{cases} A \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_u & \text{wenn } u > s \\ A \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{F}_u & \text{wenn } u \leq s\} \end{cases}$$

Damit ist $A \cap \{s < T\} \in \mathcal{F}_{s\wedge T}$. Dann gilt also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{t\wedge T} \mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[X_{t\wedge T} \mathbb{1}_{A\cap\{s<T\}}] + \mathbb{E}[X_{t\wedge T} \mathbb{1}_{A\cap\{s\geq T\}}] \\ &= \mathbb{E}[X_{s\wedge T} \mathbb{1}_{A\cap\{s<T\}}] + \mathbb{E}[X_{s\wedge T} \mathbb{1}_{A\cap\{s\geq T\}}] = \mathbb{E}[X_{s\wedge T} \mathbb{1}_A], \end{aligned}$$

wobei wir für den ersten Erwartungswert den ersten Teil benutzt haben. Damit ist also

$$\mathbb{E}[X_{t\wedge T} \,|\, \mathcal{F}_s] = X_{s\wedge T},$$

wie behauptet. □

Beispiel 1.39. *Austrittzeiten einer Brown'schen Bewegung aus einem Intervall.* Wir betrachten eine Brown'sche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ gestartet in x und die erste Austrittszeit aus dem Intervall (a,b) mit $a < x < b$, d.h.

$$T^{a,b} := \inf\{t \geq 0 \,:\, B_t \leq a \text{ oder } B_t \geq b\}.$$

Nach Proposition 1.21 ist dies eine Stoppzeit bezüglich der natürlichen Filtration der Brown'schen Bewegung. Nun gilt nach dem Optional Sampling Satz 1.36 (zusammen mit Bemerkung 1.37) angewandt auf die Stoppzeiten $\sigma = 0$ und $T^{a,b} \wedge n$ für ein $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x = B_0 &= \mathbb{E}[B_{T^{a,b}\wedge n} \,|\, F_0] = \mathbb{E}[B_{T^{a,b}\wedge n}] \\ &= a\,\mathbb{P}\{B_{T^{a,b}} = a, T^{a,b} \leq n\} + b\,\mathbb{P}\{B_{T^{a,b}} = b, T^{a,b} \leq n\} + \mathbb{E}[B_n \mathbb{1}_{\{T^{a,b}\geq n\}}]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Wir wollen nun $n \to \infty$ betrachten. Dazu bemerken wir, dass aus der Skalierungseigenschaft der Brown'schen Bewegung folgt $B_n \overset{d}{=} \sqrt{n} B_1$ und damit

$$\mathbb{P}\{T^{a,b} \geq n\} = \mathbb{P}\{\sup_{t\in[0,n]} B_t \in [a,b]\} \leq \mathbb{P}\{B_n \in [a,b]\} = \mathbb{P}\{B_1 \in \tfrac{1}{\sqrt{n}}[a,b]\} \to 0,$$

mit $n \to \infty$. Insbesondere ist $T^{a,b} < \infty$ fast sicher. Weiterhin gilt $|B_n| \leq \max\{a,b\}$ auf $\{T^{a,b} \geq n\}$ und damit folgt aus (1.4) mit dominierter Konvergenz

$$x = a\mathbb{P}\{B_{T^{a,b}} = a\} + b\mathbb{P}\{B_{T^{a,b}} = b\}.$$

Durch Umstellen und, da sich die Wahrscheinlichkeiten zu 1 aufaddieren, folgt

$$\mathbb{P}\{B_{T^{a,b}} = a\} = \frac{b-x}{b-a}.$$

Mit einem ähnlichen Trick kann man auch $\mathbb{E}[T^{a,b}]$ berechnen. ◇

Als weitere Anwendung des Optional Sampling Satzes zeigen wir wie einfach man das Supremum eines Martingals abschätzen kann.

Satz 1.40. *Es sei X ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit rechtsstetigen Pfaden und X sei entweder ein Martingal oder ein nicht-negatives Submartingal. Dann gilt für $t \geq 0$ und mit $X_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} |X_s|$ und $\lambda > 0$.*

(i) Doob'sche Maximalungleichung: Wenn $p \geq 1$,

$$\lambda^p\, \mathbb{P}\Big\{X_t^* \geq \lambda\Big\} \leq \mathbb{E}[|X_t|^p].$$

(ii) Doob'sche L^p-Ungleichung: Für $p > 1$,

$$\mathbb{E}\big[(X_t^*)^p\big] \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}[|X_t|^p].$$

Bemerkung 1.41. Die Doob'sche Ungleichung kann man auch mit Hilfe der L^p-Norm $\|\cdot\|_p$ schreiben als

$$\|X_t^*\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|X_t\|_p.$$

Beweis. (nach [Ren13]) (i) Seien $\lambda, t > 0$. Wir betrachten die zufällige Zeit $\tau = \inf\{s \geq 0 : |X_s| > \lambda\} \wedge t$. Da X rechtsstetig, ist nach Proposition 1.21 τ eine schwache $\mathbb{F}$-Stoppzeit und damit eine $\mathbb{F}^+$-Stoppzeit. Außerdem ist $\tau \leq t$ beschränkt und $(|X_t|^p)_{t\geq 0})$ ein Submartingal (*Übungsaufgabe*), so dass aus dem Optional Sampling-Satz 1.36 folgt, dass

$$\mathbb{E}[|X_t|^p] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_t|^p \mid \mathcal{F}_\tau^+]] \geq \mathbb{E}[|X_\tau|^p] \geq \mathbb{E}[|X_t|^p \mathbb{1}_{\{X_t^* < \lambda\}}] + \lambda^p \mathbb{P}\{X_t^* \geq \lambda\}.$$

Daraus folgt

$$\lambda^p\, \mathbb{P}\{X_t^* \geq \lambda\} \leq \mathbb{E}[|X_t|^p \mathbb{1}_{\{X_t^* \geq \lambda\}}] \leq \mathbb{E}[|X_t|^p]. \tag{1.5}$$

(ii) Nach dem Satz von Fubini und nach (1.5) für beliebiges n

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^* \wedge n)^p] &= \int_0^n p\lambda^{p-1}\, \mathbb{P}\{|X_t^*| \geq \lambda\}\, d\lambda \leq \int_0^n p\lambda^{p-1}\lambda^{-1}\mathbb{E}[|X_t|\mathbb{1}_{\{X_t^* \geq \lambda\}}]\, d\lambda \\
&= p\, \mathbb{E}\Big[|X_t| \int_0^{X_t^* \wedge n} \lambda^{p-2}\, d\lambda\Big] \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|X_t|(X_t^* \wedge n)^{p-1}] \\
&\leq \frac{p}{p-1}\big(\mathbb{E}|X_t|^p\big)^{1/p}\big(\mathbb{E}[(X_t^* \wedge n)^p]\big)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Hölder angewendet haben. Durch Umstellen folgt

$$\mathbb{E}[(X_t^* \wedge n)^p] \leq (\tfrac{\lambda}{\lambda-1})^p \mathbb{E}[|X_t|^p].$$

Schließlich folgt mit $n \to \infty$ und monotoner Konvergenz die Aussage (ii). □

Unser nächstes Ziel ist es den (Sub-)Martingalkonvergenzsatz zu beweisen. Dazu folgen wir wieder [Ren13].

Definition 1.42 (Überquerungszeiten)**.** Für ein rechtsstetiges Submartinal $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und reele Zahlen $a < b$ und $T \geq 0$ definieren wir die Überquerungszeiten iterativ: $S_0 = 0$ und für $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_{2n-1} &= \inf\{t \geq S_{2n-2} : X_t \geq b\} \wedge T \\
S_{2n} &= \inf\{t \geq S_{2n-1} : X_t \leq a\} \wedge T.
\end{aligned}$$

Dann ist $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge von Stoppzeiten und weiter gibt

$$D([a,b],T) := \sup\{n : S_{2n} < T\}$$

(mit $\sup\emptyset = 0$) die Anzahl der absteigenden Überquerungen (engl. downcrossings) des Intervalls $[a,b]$ durch den Prozess X im Zeitintervall $[0,T]$.

Lemma 1.43 (Überquerungslemma)**.**

$$\mathbb{E}[D([a,b],T)] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_T - b)^+].$$

Beweis. Wir betrachten die Mengen $A_k = \{S_k < T\}$. Dann gilt $A_{k+1} \subset A_k$ und wegen der Rechtsstetigkeit folgt

$$X_{S_{2n-1}} \geq b \text{ auf } A_{2n-1} \quad \text{und} \quad X_{S_{2n}} \leq a \text{ auf } A_{2n}.$$

Daraus folgt, da X ein Submartingal und wir so den dem Optional Sampling Satz 1.36 anwenden können, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}[(X_{S_{2n-1}} - b)\mathbb{1}_{A_{2n-1}}] \leq \mathbb{E}[(X_{S_{2n}} - b)\mathbb{1}_{A_{2n-1}}] \\ &= \mathbb{E}[(X_{S_{2n}} - b)\mathbb{1}_{A_{2n}}] + \mathbb{E}[(X_{S_{2n}} - b)\mathbb{1}_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}] \\ &\leq (a-b)\mathbb{P}(A_{2n}) + \mathbb{E}[(X_T - b)\mathbb{1}_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}] \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\mathbb{P}\{D([a,b],T) \geq n\} = \mathbb{P}(A_{2n}) \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_T - b)^+\mathbb{1}_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}].$$

Da die Mengen $A_{2n-1} \setminus A_{2n}$ paarweise disjunkt sind, folgt

$$\mathbb{E}[D([a,b],T]) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{D[a,b],T \geq n\} \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_T - b)^+],$$

wie gefordert. □

Satz 1.44. *Sei X ein rechtsstetiges $\mathbb{F}$-Submartingal so dass $\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}X_t^+ < \infty$. Dann existiert $X_\infty(\omega) := \lim_{t\to\infty} X_t(\omega)$ für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$ und $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$.*

Beweis. Für $a < b$ existiert wegen der Monotonie $D([a,b]) := \lim_{T\to\infty} D([a,b],T)$ und es gilt mit Lemma 1.43

$$\mathbb{E}[D([a,b])] = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}[D([a,b],T)] \leq \limsup_{T\to\infty} \frac{\mathbb{E}[X_T^+] + |b|}{b-a} < \infty,$$

nach Annahme. D.h. $D([a,b]) < \infty$ fast sicher. Damit ist die Menge

$$A = \bigcup_{a<b,a,b\in\mathbb{Q}} \{D([a,b]) = \infty\},$$

eine $\mathbb{P}$-Nullmenge. Nun gilt für $\underline{X} = \liminf_{t\to\infty} X_t$ und $\overline{X} = \limsup_{t\to\infty} X_t$

$$\{\underline{X} \neq \overline{X}\} \subseteq A,$$

so dass $X = \lim_{t\to\infty} X_t \in [-\infty, \infty]$ fast sicher existiert. Wir zeigen nun dass X integrierbar und damit f.s. endlich ist. Dazu bemerken wir, dass aus $|x| = 2x^+ - x$ und der Submartingal-Eigenschaft folgt, dass

$$\mathbb{E}|X_t| = 2\mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_t \leq 2\mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_0.$$

Damit ist nach Annahme $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}|X_t| < \infty$. Schließlich folgt mit Fatous Lemma

$$\mathbb{E}|X| \leq \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}|X_t| < \infty,$$

so dass X fast sicher endlich und sogar integrierbar ist. □

Korollar 1.45. *Ein nicht-negatives, rechtsstetiges Supermartingal $(X_t)_{t\geq 0}$ konvergiert fast sicher gegen eine integrierbare Zufallsvariable X.*

Beweis. Es gilt dass $Z_t = -X_t$ ein Submartingal ist und $Z_t^+ = 0$ nach Annahme. Damit greift Satz 1.44. □

Wir sagen, dass ein Martingal $(X_t)_{t\geq 0}$ *L^p-beschränkt* ist, wenn $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty$.

Satz 1.46 (L^p-Martingalkonvergenzsatz)**.** *Für $p > 1$, sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein L^p-beschränktes, rechtsstetiges Martingal. Dann gibt es eine L^p-integrierbare Zufallsvariable X_∞, so dass $\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty$ fast sicher und in L^p. Weiterhin gilt*

$$X_t = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t] \quad \textit{fast sicher.}$$

Bemerkung 1.47. (i) Wenn die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die üblichen Bedingungen erfüllt, gilt auch eine Art Umkehrung des Satzes: Wenn $Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, dann gibt es ein rechtsstetiges, L^p-beschränktes Martingal $X = (X_t)_{t\geq 0}$, so dass $X_t = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_t]$ fast sicher und $X_t \to Y$ fast sicher und in L^p.

(ii) Es gilt nicht, dass ein L^1 beschränktes Martingal automatisch in L^1 konvergiert. Denn für ein nicht-negatives Martingal X gilt $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}|X_t| = \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_0$ und damit ist X L^1-beschränkt. Allerdings gibt es nicht-negative Martingale, die nicht in L^1 konvergieren (siehe Galton-Watson Verzweigungsprozesse). Um L^1-Konvergenz zu bekommen, muss man mindestens fordern, dass die Familie $\{X_t, t \geq 0\}$ gleichgradig integrierbar ist. Als Referenz: Eine Familie von reelle Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in I}$ heißt *gleichgradig integrierbar*, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{|X_t|\geq n\}} |X_t|\big] = 0.$$

Für den entsprechenden Beweis nutzt man, dass eine Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren Zufallsvariablen genau dann in L^1 gegen ein $X \in L^1$ konvergiert wenn die Folge gleichgradig integrierbar ist und X_n gegen X in Wahrscheinlichkeit konvergiert (siehe [Kle08, Satz 6.25]).

Beweis von Satz 1.46. Wenn X ein rechtsstetiges L^p-beschränktes Martingal ist, dann konvergiert nach dem Submartingal-Konvergenzsatz 1.44 X_t fast sicher gegen eine integrierbare Zufallsvariable X_∞. Aus Doob's L^p-Ungleichung folgt für $X_t^* = \sup_{0\le s\le t} |X_s|$ mit Hilfe von monotoner Konvergenz

$$\|X_\infty^*\|_p = \lim_{t\to\infty} \|X_t^*\|_p \le \frac{p}{p-1} \sup_{t\in[0,\infty)} \|X_t\|_p < \infty,$$

nach Annahme. Nun gilt $|X_t - X_\infty|^p \le (2X_\infty^*)^p$, so dass mit dominierter Konvergenz folgt, dass $X_t \to X_\infty$ in L^p (und damit natürlich auch in L^1). Wir müssen noch zeigen, dass $X_t = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t]$ fast sicher. Dazu betrachten wir $s \ge t$, dann gilt

$$\|X_t - \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t]\|_1 = \|\mathbb{E}[X_s - X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t]\|_1 \le \|X_s - X_\infty\|_1.$$

Mit $s \to \infty$ konvergiert die linke Seite gegen 0. Insbesondere ist damit $X_t = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t]$ fast sicher. □

1.4 Semimartingale, quadratische Variation

Für den Rest dieses Kapitels betrachten wir nur *stetige* Martingale. Außerdem ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein fester filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

In diesem Kapitel werden wir die Grundlagen legen, die wir später zur Definition des stochastischen Integrals benötigen werden. Insbesondere werden wir die Klasse von Prozessen kennenlernen, die als Integrator dienen werden. Dies sind sogenannte Semimartingale, die zerlegt werden können in einen Anteil der von (lokal) beschränkter Variation ist und einen Martingalanteil (genauer: eine Anteil der ein lokales Martingal ist).

Definition 1.48. Ein reellwertiger stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\ge0}$ ist von (lokal) *beschränkter Variation* (genauer: hat Pfade, die von lokal beschränkter Variation sind), wenn für alle $t \ge 0$ und alle $\omega \in \Omega$

$$V_t(\omega) := \sup_{\Delta\in\mathcal{D}[0,t]} \sum_{i=1}^n |X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}(\omega)| < \infty,$$

wobei $\mathcal{D}[0,t]$ die Menge aller Partitionen $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$ des Intervalls $[0,t]$ ist. V wird als *Variation* von X bezeichnet. Wir bezeichnen den Raum aller reellwertigen, adaptierten und stetigen stochastischen Prozesse, die von lokal beschränkter Variation sind, mit $\mathcal{A}$. Weiter bezeichnen wir den Raum aller reellwertigen, adaptieren, stetigen und nicht-fallenden stochastischen Prozesse mit $\mathcal{A}^+$.

Bemerkung 1.49. (i) Wenn $X \in \mathcal{A}^+$, dann $X \in \mathcal{A}$. Denn wenn $t \mapsto X_t(\omega)$ nicht-fallend ist, dann gilt für $\Delta = \{0 = t_0 < \ldots < t_n = t\} \in \mathcal{D}_t$,

$$\sum_{i=1}^n |X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}(\omega)| = \sum_{i=1}^n \big(X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}\big) = X_t(\omega) - X_0(\omega),$$

und damit ist $V_t(\omega) = X_t(\omega) - X_0(\omega)$.

(ii) Weiter gilt, dass wenn $X \in \mathcal{A}$ dann ist die Variation $V \in \mathcal{A}^+$ *(Übungsaufgabe)*.

(iii) Man kann zeigen, dass $\mathcal{A}$ ein Vektorraum ist *(Übungsaufgabe)*.

Lemma 1.50. *$X \in \mathcal{A}$ genau dann, wenn $X^-, X^+ \in \mathcal{A}^+$ existieren, so dass $X(\omega) = X_t^+(\omega) - X_t^-(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.*

Beweis. Wenn $X = X^- - X^+$ für X^-, X^+, dann sind nach Bemerkung 1.49 $X^-, X^+ \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ ist ein Vektorraum, also gilt $X \in \mathcal{A}$.
Für die Rückrichtung definieren wir für $X \in \mathcal{A}$, die (rechtsstetigen) Prozesse

$$X_t^+(\omega) = \tfrac{1}{2}(V_t(\omega) + X_t(\omega)) \quad \text{und} \quad X_t^-(\omega) = \tfrac{1}{2}(V_t(\omega) - X_t(\omega)).$$

Wir zeigen, dass X_t^+ wachsend ist. Dazu betrachten wir $s \le t$ und dann ist

$$X_t^+ - X_s^+ = \tfrac{1}{2}(V_t - V_s + X_t - X_s) \ge \tfrac{1}{2}(V_t - V_s - |X_t - X_s|). \tag{1.6}$$

Wir müssen also zeigen, dass die rechte Seite nicht-negativ ist. Nach Definition gibt es für $\delta > 0$ eine Folge $t_0 < t_1 < \ldots < t_k = s$, so dass

$$V_s \le \sum_{i=1}^{k} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| + \delta.$$

Dann ist $t_0 < t_1 < \ldots < t_k = s < t$ eine Partition von $[0, t]$, so dass

$$V_t \ge \sum_{i=1}^{k} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| + |X_t - X_s| \ge V_s - \delta + |X_t - X_s|.$$

Da δ beliebig war, folgt $V_t \ge V_s + |X_t - X_s|$ und damit ist die rechte Seite in (1.6) nicht-negativ wie gefordert. Der Beweis, dass X^- wachsend ist, erfolgt analog. $\square$

Definition 1.51. Ein adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess $M = (M_t)_{t \ge 0}$ ist ein ($\mathbb{F}$-) *lokales Martingal*, wenn eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \ge 1}$ existiert, so dass $\tau_n \uparrow \infty$ fast sicher und so, dass der gestoppte Prozess

$$M_t^{\tau_n} := M_{t \wedge \tau_n}, \quad t \ge 0,$$

ein Martingal ist. Die Klasse aller lokalen Martingale mit stetigen Pfaden wird mit $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ bezeichnet. Wir schreiben $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^0$, wenn $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ und $M_0 = 0$[1]. Weiterhin bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$ die Klasse der stetigen Martingale.

[1] Diese Konvention werden wir allgemein benutzen: Wenn $\mathcal{S}$ einen Raum von bestimmten Prozessen bezeichnet, dann bezeichnet $\mathcal{S}^0$ den Raum dieser Prozesse mit der zusätzlichen Bedingung, dass sie in 0 starten.

Bemerkung 1.52. Jedes Martingal ist ein lokales Martingal ($\tau_n = \infty$ für alle n). Andererseits gibt es stetige lokale Martingale, die kein Martingal sind. Ein Beispiel ist $X_t = \frac{1}{|x+B_t|}$ für $(B_t)_{t\geq 0}$ eine drei-dimensionale Brown'sche Bewegung, d.h. $B_t = (B_t^1, B_t^2, B_t^3)$ für drei unabhängige, ein-dimensionale Brown'sche Bewegungen $(B_t^i)_{t\geq 0}$. Dies werden wir allerdings erst im nächsten Kapitel mit Hilfe der Itô-Formel zeigen.

Proposition 1.53. *Wenn $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ die Bedingung $\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,t]} |M_s|] < \infty$ für alle $t > 0$ erfüllt, dann ist $M \in \mathcal{M}$.*

Beweis. Angenommen $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wie in der Definition 1.51 und $M_t^{\tau_n} = M_{t\wedge\tau_n}$. Für jedes $t \geq 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} M_t^{\tau_n} = M_t$ fast sicher und, da $M_t^{\tau_n} \leq \sup_{s\in[0,t]} M_s$ und nach Annahme $\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,t]} M_s] < \infty$, auch in L^1. Daraus folgt für $0 \leq s \leq t$, da der gestoppte Prozess ein Martingal ist, für alle $A \in \mathcal{F}_s$, fast sicher

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)\mathbb{1}_A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_t^{\tau_n}\mathbb{1}_A] - \mathbb{E}[M_s^{\tau_n}\mathbb{1}_A] = 0.$$

Damit gilt $\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathcal{F}_s] = M_s$. □

Im folgenden Kapitel werden wir sehen, dass wir das stochastische Integral bezüglich der folgenden Klasse von stochastische Prozess definieren können.

Definition 1.54. Ein stochastischer Prozess X der Form $X_t = M_t + A_t$, wobei $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ und $A \in \mathcal{A}$, heißt *(stetiges) Semimartingal*. Die Familie aller stetigen Semimartingale bezeichnen wir mit $\mathcal{S}$.

Satz 1.55. *Das einzige (bis auf Ununterscheidbarkeit) stetige lokale Martingal M, welches von lokal beschränkter Variation ist und $M_0 = 0$ erfüllt, ist das konstante Martingal $M_t(\omega) = 0$ für alle ω. D.h.*

$$\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^0 \cap \mathcal{A} = \{0\}.$$

Insbesondere ist die Zerlegung von $X \in \mathcal{S}$ in Definition 1.54 eindeutig, wenn wir darauf bestehen, dass $M_0 = 0$.

Beweis. Gegeben sei $X \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^0 \cap \mathcal{A}$ und $(V_t)_{t\geq 0}$ sei die assoziierte Variation. Zunächst nehmen wir an, dass X und V in (ω, t) beschränkt sind. D.h. es gibt $C_1, C_2 > 0$ so dass

$$|X_t(\omega)| \leq C_1, \quad V_t(\omega) \leq C_2 \quad \text{für alle } \omega \in \Omega,\, t \geq 0.$$

Für $\varepsilon > 0$, setzen wir $T_0 := 0$ und dann

$$T_{i+1} = \inf\{t \geq T_i \,:\, |X_t - X_{T_i}| \geq \varepsilon\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Wir halten $t > 0$ fest und betrachten die Stoppzeiten $S_i = T_i \wedge t$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}X_{S_n}^2 = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{S_{i+1}}^2 - X_{S_i}^2)\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{S_{i+1}} - X_{S_i})^2\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} X_{S_i}(X_{S_{i+1}} - X_{S_i})\Big]$$

Nun gilt nach Proposition 1.53, dass $X \in \mathcal{M}$. Aus dem Optional Sampling Satz 1.36 (da $S_i \leq t$) folgt, dass

$$\mathbb{E}[X_{S_i}(X_{S_{i+1}} - X_{S_i})] = \mathbb{E}[X_{S_i}(\mathbb{E}[X_{S_{i+1}} \,|\, \mathcal{F}_{S_i}] - X_{S_i})] = 0.$$

Daraus schließen wir

$$\mathbb{E}X_{S_n}^2 = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{S_{i+1}} - X_{S_i})^2\Big] \leq \varepsilon\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1}|X_{S_{i+1}} - X_{S_i}|\Big] \leq \varepsilon\mathbb{E}V_t \leq \varepsilon C_2.$$

Da $T_n \to \infty$ fast sicher, können wir daraus mit dominierter Konvergenz folgern, dass

$$\mathbb{E}X_t^2 \leq \varepsilon C_2.$$

Nun ist $\varepsilon > 0$ beliebig gewesen, so dass deshalb $X_t = 0$ fast sicher für alle $t \geq 0$ gilt und somit wegen der Stetigkeit $X \equiv 0$ fast sicher.

Für den allgemeinen Fall betrachten wir die τ_n wie in Definition 1.51 und setzen dann

$$\overline{T}_n := \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t \geq n\}, \quad \widehat{T}_n := \inf\{s \geq 0 \,:\, V_t \geq n\}, \quad \tilde{T}_n := \inf\{\tau_n, \overline{T}_n, \widehat{T}_n\}.$$

Dann erfüllt für jedes $n \in \mathbb{N}$, der gestoppte Prozess $(X_{t\wedge\tilde{T}_n})_{t\geq 0}$ die Bedingungen des ersten Teils, so dass $X_{t\wedge\tilde{T}_n} = 0$ für alle $t \geq 0$. Da $\tilde{T}_n \to \infty$ folgt die Aussage des Satzes. □

Bemerkung 1.56. Die Aussage von Satz 1.55 wird falsch, wenn wir die Bedingung weglassen, dass die Prozesse stetig sind. So kann man einen Poissonprozess N_t mit Rate $\lambda > 0$ auf zwei Arten in Martingal plus Prozess von beschränkter Variaton zerlegen: $N_t = (N_t - \lambda t) + \lambda t$ und als $N_t = 0 + N_t$.

Satz 1.55 besagt auch, dass die Pfade einer Brown'sche Bewegung nicht von lokal beschränkter Variation sind. Allerdings hat diese endliche quadratische Variation in dem folgenden Sinn.

Definition 1.57. Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}$ die Familie aller Partitionen $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots\}$ von $[0,\infty)$ so dass $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Weiter sei $\|\Delta\| = \sup\{t_i - t_{i-1}, i \in \mathbb{N}\}$. Für einen stochastischen Prozess X und $\Delta \in \mathcal{D}$, definieren wir

$$T_t^\Delta(X) := \sum_{i=0}^{k-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + |X_t - X_{t_k}|^2, \quad t \geq 0,$$

wobei k gerade so gewählt ist, dass $t \in [t_k, t_{k+1})$. Wir sagen, dass X *endliche quadratische Variation* hat, wenn es einen Prozess $\langle X\rangle = (\langle X\rangle_t)_{t\geq 0}$ gibt, so dass T_t^Δ in Wahrscheinlichkeit gegen $\langle X\rangle_t$ konvergiert für $|\Delta| \to 0$. D.h. für alle $\delta > 0$ und $t \geq 0$ gilt

$$\lim_{\Delta\in\mathcal{D},\|\Delta\|\to 0} \mathbb{P}\{|T_t^\Delta - \langle X\rangle_t| \geq \delta\} = 0.$$

Bemerkung 1.58. Wir werden in Bemerkung 1.63 sehen, dass für eine Brown'sche Bewegung B gilt $\langle B\rangle_t = t$. Dies charakterisiert sogar eine Brown'sche Bewegung. Allerdings kann man auch zeigen, dass in diesem Fall T_t^Δ nicht fast sicher konvergiert. Für fast alle $\omega \in \Omega$ kann man eine Folge $\Delta_n(\omega) \subset \mathcal{D}$ mit $\|\Delta_n(\omega)\| \to 0$ so dass $T_n^t(\omega) \to \infty$. Sogar für eine deterministische Wahl $\Delta_n(\omega)$ kann es sein, dass $\limsup_{n\to\infty} T_n(\omega) = \infty$, siehe [MP10, Exercise 1.15].

Satz 1.59. *Das Martingal $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^0$ sei beschränkt in (t,ω) (und damit $M \in \mathcal{M}_0$). Dann hat M endliche quadratische Variation und $\langle M\rangle$ ist der eindeutige Prozess in $\mathcal{A}^+$ (der in 0 startet) so dass $(M_t^2 - \langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.*

Beweis. (nach [RY99]) Die Eindeutigkeit folgt direkt aus Theorem 1.55. Denn angenommen es gibt $A, A' \in \mathcal{A}$ so dass $M_t^2 - A_t$ und $M_t^2 - A_t'$ Martingale sind. Dann ist auch $A_t' - A_t = M_t^2 - A_t - (M_t^2 - A_t')$ ein Martingal mit Start in 0 und außerdem ist es in $\mathcal{A}$. Damit muss gelten $A = A'$ (bis auf Ununterscheidbarkeit).

Nun müssen wir noch die Existenz des Prozesses $\langle M\rangle$ zeigen.

Schritt 1. Für jedes $\Delta \in \mathcal{D}$ ist $M_t^2 - T_t^\Delta(M)$ ein Martingal.

Zunächst bemerken wir, dass aus der Martingaleingeschaft folgt, dass für $0 \leq u \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_u] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_u]. \tag{1.7}$$

Analog zeigt man, dass für $s \in [t_k, t_{k+1})$,

$$\mathbb{E}[(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_{t_{k+1}} - M_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s] + (M_s - M_{t_k})^2. \tag{1.8}$$

Dann folgt mit (1.7) und (1.8) für $t \in [t_n, t_{n+1})$ und $s \in [t_k, t_{k+1})$ mit $s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_t^\Delta(M) - T_s^\Delta(M) \,|\, \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=k}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_t - M_{t_n})^2 - (M_s - M_{t_k})^2 \,|\, \mathcal{F}_s\Big] \\
&= \sum_{i=k+1}^{n-1} \mathbb{E}[M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2 \,|\, \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_{t_{k+1}}^2 - M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&\quad + \mathbb{E}[M_t^2 - M_{t_n}^2 \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s]
\end{aligned}$$

D.h. $M_t^2 - T_t^\Delta$ ist ein Martingal. $\overset{\text{Schritt 1}}{\diamond}$

Wir schreiben $T_t^\Delta := T_t^\Delta(M)$. Dann ist T^Δ ein Kompensator für M^2, allerdings ist T_t^Δ nicht unbedingt wachsend, dies gilt erst im Limes $\|\Delta\| \downarrow 0$.

Schritt 2. Wir zeigen für $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D}$,

$$\mathbb{E}[(T_t^\Delta - T_t^{\Delta'})^2] \to 0 \text{ wenn } \|\Delta\| + \|\Delta'\| \to 0 \tag{1.9}$$

Wir holen den Beweis von Schritt 2 am Ende nach.

Schritt 3. Wir zeigen, dass $\langle M\rangle \in \mathcal{A}^+$ existiert so dass $T^{\Delta_n} \to \langle M\rangle_t$ in Wahrscheinlichkeit und in L^2, wenn $\Delta^n \in \mathcal{D}$ mit $\|\Delta_n\| \to 0$.

Gegeben sei eine Folge $\Delta^n \in \mathcal{D}$ mit $\|\Delta_n\| \to 0$. Da L^2 vollständig ist, folgt aus Schritt 2 sofort, dass es $\langle M\rangle_t$ gibt, so dass $T_t^{\Delta} \to \langle M\rangle_t$ in L^2 und damit auch in Wahrscheinlichkeit. Wenn wir die Doob'sche L^2-Ungleichung, Satz 1.46, auf das Martingal $T^{\Delta_n} - T^{\Delta_m}$ anwenden, dann erhalten wir für $a > 0$

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,a]} |T_t^{\Delta_n} - T_t^{\Delta_m}|^2\Big] \le 4\,\mathbb{E}|T_a^{\Delta_n} - T_a^{\Delta_m}|^2,$$

und nach (1.9) konvergiert die rechte Seite gegen 0. Da aus Konvergenz in L^2, fast sichere Konvergenz entlang einer Teilfolge folgt, gibt es eine Folge $\{n_k\}$, so dass fast sicher

$$\sup_{t\in[0,a]} |T_t^{\Delta_{n_k}} - \langle M\rangle_t| \to 0.$$

Damit ist $(\langle M\rangle_t)_{t\ge 0}$ fast sicher stetig.

Schließlich zeigen wir, dass $\langle M\rangle_t$ wachsend ist. Dazu können wir annehmen, dass für die obige Folge gilt: Δ_{n+1} ist eine Verfeinerung von Δ_n und dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ dicht in $[0,a]$ liegt. Für $s,t \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$, $s<t$, gibt es ein n_0 so dass $s,t\in\Delta_{n_0}$. Dann gilt notwendigerweise für alle $n \ge n_0$, $T_s^{\Delta_n} \le T_t^{\Delta_n}$ und damit $\langle M\rangle_s \le \langle M\rangle_t$. Aus der Stetigkeit folgt diese Aussage dann für alle $s,t\in[0,a]$, $s<t$.

Schritt 4. Die Martingaleigenschaft von $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ folgt aus Schritt 1 und aus der L^2-Konvergenz.

Beweis von Schritt 2: Wir betrachten die Vereinigung $\Delta\Delta'$ der Partitionen Δ und Δ'. Nach Schritt 1 ist der Prozess $X := T^{\Delta} - T^{\Delta'}$ ein Martingal und damit folgt nochmals aus Schritt 1, dass $X_t^2 - T_t^{\Delta\Delta'}(X)$ ein Martingal ist und somit gilt

$$\mathbb{E}[(T_t^{\Delta} - T_t^{\Delta'})^2] = \mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[T_t^{\Delta\Delta'}(X)].$$

Aus der allgemeinen Ungleichung $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$ folgt

$$T_t^{\Delta\Delta'}(X) \le 2\big(T_t^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta}) + T_t^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta'})\big).$$

Wir müssen also zeigen, dass $\mathbb{E}[T_t^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta})]$ gegen 0 konvergiert, wenn $\|\Delta\| + \|\Delta'\| \to 0$.

Dazu betrachten wir $s_k \in \Delta\Delta'$ und bezeichnen mit t_ℓ den größten Punkt in Δ so dass $t_\ell \le s_k < s_{k+1} \le t_{\ell+1}$. Dann gilt

$$T_{s_{k+1}}^{\Delta} - T_{s_k}^{\Delta} = (M_{s_{k+1}} - M_{t_\ell})^2 - (M_{s_k} - M_{t_\ell})^2 = (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_\ell}).$$

Daraus folgt, dass

$$T_t^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta}) \le \Big(\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_\ell}|^2\Big) T_t^{\Delta\Delta'}.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung können wir daraus also schließen, dass

$$\mathbb{E}[T_t^{\Delta\Delta'}(T^\Delta)] \leq \mathbb{E}\Big[\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_\ell}|^4\Big]^{1/2} \mathbb{E}[(T_t^{\Delta\Delta'})^2]^{1/2}.$$

Da M beschränkt ist (uniform in (t,ω)) und stetig, konvergiert der erste Erwartungswert gegen 0. Schließlich zeigen wir noch, dass der zweite Term uniform in $\Delta\Delta'$ beschränkt ist. Dazu sei $\Delta = \{0 < t_1 < \ldots <\}$ und wir können annehmen $t_n = t$. Wir wählen C so, dass $M_t(\omega) \leq C$ für alle (ω, t). Dann gilt

$$(T_t^\Delta)^2 = \Big(\sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\Big)^2 = 2\sum_{k=1}^n (T_t^\Delta - T_{t_k}^\Delta)(T_{t_k}^\Delta - T_{t_{k-1}}^\Delta) + \sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4.$$

Nun folgt aus Schritt 1 zusammen mit (1.7) $\mathbb{E}[T_t^\Delta - T_{t_k}^\Delta \,|\, \mathcal{F}_{t_k}] = \mathbb{E}[(M_t - M_{t_k})^2 \,|\, \mathcal{F}_{t_k}]$ und somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(T_t^\Delta)^2] &= 2\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big[(M_t - M_{t_k})^2 (T_{t_k}^\Delta - T_{t_{k-1}}^\Delta)\Big] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big[(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4\Big] \\
&\leq \mathbb{E}\Big[2\sup_\ell |M_{t_\ell} - M_{t_{\ell-1}}|^2 \sum_{k=1}^n (T_{t_k}^\Delta - T_{t_{k-1}}^\Delta) \\
&\qquad + \sup_\ell |M_{t_\ell} - M_{t_{\ell-1}}|^2 \sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\Big] \\
&\leq 6C^2 \mathbb{E}[T_t^\Delta] \leq 6C^2(\mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_0^2]) \leq 6C^4,
\end{aligned}$$

was den Beweis von Schritt 2 vervollständigt und damit den Beweis von Satz 1.59 abschließt. □

Lemma 1.60. *Für M wie in Satz 1.59 und eine Stoppzeit T definieren wir $M_t^T := M_{t\wedge T}$. Dann gilt*

$$\langle M^T \rangle_t = \langle M \rangle_{t\wedge T}.$$

Beweis. Nach dem Optional Sampling Satz 1.36 und nach Satz 1.59 ist der Prozess $t \mapsto M_{T\wedge t}^2 - \langle M \rangle_{t\wedge T}$ ein Martingal. Mit der Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.55 folgt das Lemma. □

Definition 1.61. Wenn $X^n = (X^n)_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ und $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ stochastische Prozesse sind, dann sagen wir, dass X^n *lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit* (lgW) gegen Y konvergiert, wenn für jedes $t > 0$, $\sup_{0\leq s\leq t} |X_s^n - Y_s|$ für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert

Satz 1.62. *Für $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^0$ gibt es einen eindeutigen Prozess $\langle M \rangle \in \mathcal{A}^+$ (der in der Null startet) so dass*

$$M^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^0.$$

Außerdem gilt $\langle M \rangle = \lim_{|\Delta|\to 0} T^\Delta(M)$ lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit.

Bemerkung 1.63. (a) *Quadratische Variation einer Brown'schen Bewegung.* In Lemma 1.30(ii) haben wir gesehen, dass $B_t^2 - t$ ein Martingal ist. Damit folgt aus Satz 1.62, dass $\langle B\rangle_t = t$.

(b) Die Aussage von Lemma 1.60 gilt auch für lokale Martingale. Dazu sei $M \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ und T eine Stoppzeit. Nach Satz 1.62 ist $M^2 - \langle M\rangle$ ein lokales Martingal. D.h. es gibt eine Folge T_n von Stoppzeit, so dass $T_n \to \infty$ fast sicher und $M^2_{t\wedge T_n} - \langle M\rangle_{t\wedge T_n}$ ist ein Martingal. Nach dem Optional Sampling Satz, Korollar 1.38, gilt

$$M^2_{t\wedge T\wedge T_n} - \langle M\rangle_{t\wedge T_n\wedge T}, \quad t \geq 0,$$

ist ein Martingal. Damit ist $(M^T)^2_t - \langle M\rangle_{t\wedge T}$ ein lokales Martingal und wieder nach Satz 1.62 gilt $\langle M^T\rangle_t = \langle M\rangle_{t\wedge T}$.

Beweis von Satz 1.62. Die Eindeutigkeit folgt wieder aus Satz 1.55. Wir definieren $T_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| = n\}$ und $M^n := M^{T_n}$. Dann ist M^n ein beschränktes Martingal und nach Satz 1.59 gibt es einen Prozess $\langle M^n\rangle$ so, dass $(M^n)^2 - \langle M^n\rangle$ ein Martingal ist. Falls $m \leq n$, dann gilt $(M^n)^{T_m} = M^m$ und nach Lemma 1.60 ist $\langle M^n\rangle_{t\wedge T_m} = \langle M^m\rangle_t$. Auf der Menge $\{T_m \geq t$ können wir also

$$\langle M\rangle_t = \langle M^m\rangle_t \tag{1.10}$$

definieren. Dieser Aussdruck ist wohl-definiert und $\lim_{n\to\infty}\langle M^n\rangle_t = M_t$. Da $(M^n)^2 - \langle M^n\rangle$ ein Martingal ist, folgt, dass $M^2 - \langle M\rangle \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$.

Für die zweite Aussage des Satzes, fixieren wir $\delta > 0$ und $t > 0$. Für T_n wie oben, können wir $k \in \mathbb{N}$ finden, so dass $\mathbb{P}\{T_k < t\} \leq \delta$. Mit (1.10) folgt, dass für $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big\{\sup_{s\leq t}|T_s^\Delta(M) - \langle M\rangle_s| \geq \varepsilon\big\} &\leq \delta + \mathbb{P}\big\{\sup_{s\leq t}|T_s^\Delta(M) - \langle M\rangle_s| \geq \varepsilon, T_k \geq t\big\} \\
&= \delta + \mathbb{P}\big\{\sup_{s\leq t}|T_s^\Delta(M^k) - \langle M^k\rangle_s| \geq \varepsilon, T_k \geq t\big\} \\
&\leq \delta + \mathbb{P}\big\{\sup_{s\leq t}|T_s^\Delta(M^k) - \langle M^k\rangle_s| \geq \varepsilon\big\}
\end{aligned}$$

Da M^k ein beschränktes Martingal ist, folgt wie im Beweis von Satz 1.59, dass

$$\limsup_{\|\Delta\|\to 0}\mathbb{P}\big\{\sup_{s\leq t}|T_s^\Delta(M) - \langle M\rangle_s| \geq \varepsilon\big\} \leq \delta,$$

und damit gilt die lokal gleichmäßige Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. □

Definition 1.64. Für $M, N \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ definieren wir die *quadratische Kovariation* $\langle M, N\rangle = (\langle M, N\rangle_t)_{t\geq 0}$ als

$$\langle M, N\rangle_t := \frac{1}{4}(\langle M + N\rangle_t - \langle M - N\rangle_t).$$

Satz 1.65. *Für $M, N \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ ist $\langle M, N\rangle$ der eindeutig bestimmte Prozess in $\mathcal{A}$ (gestartet in 0) so dass*

$$MN - \langle M, N\rangle \in \mathcal{M}_{\text{loc}}.$$

Außerdem gilt $\lim_{|\Delta|\to 0} T^\Delta(M,N) = \langle M, N\rangle$ *lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit, wobei*

$$T^\Delta_t(M,N) = \sum_{i\in\mathbb{N}} (M_{t_i\wedge t} - M_{t_{i-1}\wedge t})(N_{t\wedge t_i} - N_{t\wedge t_{i-1}}).$$

Beweis. Offensichtlich gilt

$$MN = \frac{1}{4}((M+N)^2 - (M-N)^2).$$

Dann folgt aus Satz 1.62, dass $MN - \langle M, N\rangle \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Außerdem ist $\langle M, N\rangle$ als Differenz zweier Prozesse aus $\mathcal{A}^+$ selber in $\mathcal{A}$. Eindeutigkeit und Konvergenz von $T^\Delta_t(M,N)$ werden wie vorher bewiesen. □

Proposition 1.66. *Wenn $X \in \mathcal{S}$ eine Zerlegung $X = M + A$ hat mit $M \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ und $A \in \mathcal{A}$, dann hat X endliche quadratische Variation $\langle X\rangle$ und es gilt $T^\Delta(X) \to \langle X\rangle = \langle M\rangle$ lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit.*

Bemerkung 1.67. Da der Prozess $\langle X\rangle$ ein Grenzwert in Wahrscheinlichkeit der Folge $T^\Delta(X)$, bleibt er unverändert, wenn wir die Filtration $\mathbb{F}$ durch eine andere ersetzen, bzgl. der X ein Semimartingal ist. Das gleiche gilt auch wenn wir $\mathbb{P}$ durch eine Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ ersetzten für dass $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ und X ist ein $\mathbb{Q}$-Semimartingal.

Beweis. Es gilt nach Definition für $X = M + A$,

$$T^\Delta_t(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} (X_{t_i\wedge s} - X_{t_{i-1}})^2 = T^\Delta_t(M) + 2T^\Delta_t(M,A) + T^\Delta_t(A).$$

Wir zeigen, dass die letzten beiden Terme gegen 0 konvergieren. Wenn wir mit $V_t(A)$ die Variation von A bezeichnen, dann gilt

$$\begin{aligned}
|T^\Delta_t(M,A)| &= |\sum_i (M_{t_i\wedge t} - M_{t_{i-1}\wedge t})(A_{t_i\wedge t} - A_{t_{i-1}\wedge t})| \\
&\le \sup_{t_i\in\Delta} |M_{t_i\wedge t} - M_{t_{i-1}\wedge t}| \sum_i |A_{t_i\wedge t} = A_{t_{i-1}\wedge t}| \\
&\le \sup_{t_i\in\Delta} |M_{t_i\wedge t} - M_{t_{i-1}\wedge t}| V_t(A) \to 0,
\end{aligned}$$

da M stetig ist. Analog kann man zeigen, dass $T_t(A) \to 0$ fast sicher lokal gleichmäßig. Die Konvergenz von $T^\Delta_t(M)$ folgt wieder aus Satz 1.62. □

Definition 1.68. Für $X, Y \in \mathcal{S}^0$ mit Zerlegung $X = M + A$ und $Y = N + B$ mit $X, Y \in \mathcal{M}^0_{\mathrm{loc}}, A, B \in \mathcal{A}$, definieren wir

$$\langle X, Y\rangle_t = \langle M, N\rangle_t.$$

Insbesondere ist $\langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t$. Für $M, N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ (also nicht unbedingt in $\mathcal{M}^0_{\mathrm{loc}}$), gilt also $\langle M, N\rangle_t := \langle (M - M_0), (N - N_0)\rangle_t$.

Definition 1.69. Die Menge der L^2-beschränkten, stetigen Martingale bezeichnen wir mit

$$\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{M} \,:\, \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|^2] < \infty\}.$$

Mit $\mathcal{H}^0$ bezeichnen wir die $M \in \mathcal{H}$ mit $M_0 = 0$.

Satz 1.70. *(i) Wenn $M \in \mathcal{H}$, dann konvergiert M_t gegen eine Zufallsvariable M_∞ fast sicher und in L^2. Weiterhin ist $M_t = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathcal{F}_t]$ fast sicher.*

(ii) $\mathcal{H}$ ist ein reeller Hilbertraum (wenn die Elemente bis auf Ununterscheidbarkeit identifiziert werden) bezüglich der Norm

$$\|M\|_{\mathcal{H}} := \lim_{t\to\infty} (\mathbb{E}[|M_t|^2])^{\frac{1}{2}} = (\mathbb{E}[|M_\infty|^2])^{\frac{1}{2}}.$$

(iii) Die folgende Norm ist äquivalent zu $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$:

$$\|M\| := \big(\mathbb{E}\big[\sup_{t\geq 0} |M_t|^2\big]\big)^{\frac{1}{2}}.$$

(iv) Es gilt $M \in \mathcal{H}^0$ genau dann wenn $M \in \mathcal{M}^0_{\mathrm{loc}}$ und $\mathbb{E}\langle M\rangle_\infty < \infty$, wobei $\langle M\rangle_\infty := \lim_{t\to\infty} \langle M\rangle_t$. In diesem Fall, gilt dass $M^2 - \langle M\rangle \in \mathcal{M}^0$ und außerdem ist

$$\|M\|^2_{\mathcal{H}} = \mathbb{E}\langle M\rangle_\infty.$$

Beweis. (i) ist ein Spezialfall von Satz 1.46 mit $p = 2$.

(ii) Aus der L^2-Konvergenz folgt die zweite Gleichung, d.h. $\mathbb{E}M^2_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}M^2_t$.

Es folgt, dass wenn $\|M - N\|_{\mathcal{H}} = 0$, dann gilt $M_\infty = N_\infty$. Daraus folgt fast sicher

$$M_t = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[N_\infty \,|\, \mathcal{F}_t] = N_t.$$

Damit sind (M_t) und $(N_t)_{t\geq 0}$ Modfikationen und wegen der Stetigkeit sind M und N ununterscheidbar. Die weiteren Eigenschaften der Norm sind klar, da $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ ein Hilbertraum ist.

Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{H}$ vollständig ist. Dazu betrachten wir eine Cauchyfolge $M^n \in \mathcal{H}$. Insbesondere ist dann M^n_∞ eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ und wegen der Vollständigkeit gibt es $\tilde{M}_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, so dass $M^n_\infty \to \tilde{M}_\infty$ in L^2.

Nach der Doob'sche L^2-Ungleichung gilt

$$\mathbb{E}\big[\sup_{s\in[0,t]}|M_s^n - M_s^m|^2\big] \le \mathbb{E}\big[\sup_{s\ge 0}|M_s^n - M_s^m|^2\big] \le \lim_{s\to\infty} 4\mathbb{E}|M_s^n - M_s^m|^2 \le 4\mathbb{E}|M_\infty^n - M_\infty^m|^2,$$

Da $C([0,t],\mathbb{R})$ vollständig ist, gibt es einen stetigen Prozess $(M_t)_{t\ge 0}$, so dass entlang einer Teilfolge (n_k) für alle $t\ge 0$,

$$\sup_{s\in[0,t]}|M_s^{n_k} - M_s| \to 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Außerdem folgt aus

$$\mathbb{E}[M_\infty^{n_k}\,|\,\mathcal{F}_t] = M_t^{n_k},$$

mit $k\to\infty$,

$$\mathbb{E}[\tilde{M}_\infty\,|\,\mathcal{F}_t] = M_t.$$

Daraus folgt, dass (M_t) ein L^2-beschränktes Martingal ist, also $M\in\mathcal{H}$.

(iii) Nach der Doob'schen L^2-Ungleichung, Satz 1.40 und monotoner Konvergenz folgt,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\ge 0} M_t^2\Big] = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\Big[\sup_{s\le t} M_s^2\Big] \le 4\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[M_t^2] = 4\mathbb{E}[M_\infty^2].$$

Andererseits ist

$$\mathbb{E}[M_\infty^2] \le \mathbb{E}\Big[\sup_{t\ge 0} M_t^2\Big],$$

so dass die Normen $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ äquivalent sind.

(iv) Wir nehmen zunächst an, dass $M\in\mathcal{H}^0$. Nach Satz 1.62 wissen wir, dass $M_t^2 - \langle M\rangle_t \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^0$. Für $T_n = \inf\{t\ge 0 : |M_t| = n\}$ folgt dann mit dem Optional Sampling Satz 1.36

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}^2] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_{t\wedge T_n}]. \tag{1.11}$$

Da $\langle M\rangle$ wachsend ist, existiert $\langle M\rangle_\infty$ und wegen monotonere Konvergenz konvergiert für $n\to\infty, t\to\infty$ die rechte Seite gegen $\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty]$.

Für die linke Seite gilt nach Fatous Lemma $\mathbb{E}[M_\infty^2] \le \liminf_{n,t\to\infty}\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}^2]$. Anderseits folgt aus dem Optional Sampling Satz angewandt auf das Submartingal M^2, dass $\mathbb{E}[M_\infty^2] \ge \limsup_{t,n\to\infty}\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}^2]$.

Nun folgt also für $M\in\mathcal{H}^0$, dass $\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty] < \infty$.

Nun nehmen wir an $M\in\mathcal{M}_{\text{loc}}^0$ und $\mathbb{E}\langle M\rangle_\infty < \infty$ und es sei T_n wie oben. Mit Fatous Lemma gilt dann wieder

$$\mathbb{E}[M_t^2] \le \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[\langle M\rangle_{t\wedge T_n}] \le \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty] < \infty. \tag{1.12}$$

Insbesondere ist $M_t\in L^2$ und $\sup_n \mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}^2] < \infty$. Daraus folgt, da $M_{t\wedge T_n}\to M_t$ fast sicher, dass auch $M_{t\wedge T_n}\to M_t$ in L^1. Damit lässt sich aus

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}\,|\,\mathcal{F}_s] = M_{s\wedge T_n},$$

schließen, dass M ein Martingal ist (siehe Übungszettel 5), welches nach (1.12) L^2-beschränkt ist und damit $M \in \mathcal{H}^0$.

Abschließend müssen wir noch zeigen, dass wenn $M \in \mathcal{H}^0$, dass dann $M^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ ein Martingal ist. Nach Lemma 1.53 folgt dies aus

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\le t} |M_s^2 - \langle M\rangle_s|\Big] \le \mathbb{E}\Big[\sup_{s\le t} |M_s^2|\Big] + \mathbb{E}\langle M\rangle_t \le 4 \sup_{s\ge 0} \mathbb{E}|M_s|^2 + \mathbb{E}\langle M\rangle_\infty < \infty,$$

wobei wir im letzten Schritt die Doob'sche L^2-Ungleichung benützt haben. □

Bemerkung 1.71. Wie viele Prozesse, die uns interessieren, ist eine Brown'sche Bewegung B nicht in $\mathcal{H}$. Wenn wir allerdings diesen Prozess zu einer deterministischen Zeit t stoppen, dann ist $(B^t_s)_{s\ge 0} := (B_{t\wedge s})_{s\ge 0}$ in $\mathcal{H}$.

Denn als Korollar aus Satz 1.70(iv), kann man schließen, dass für ein $M \in \mathcal{M}^o_{\text{loc}}$ und $t > 0$ die beiden Aussagen

$$\begin{array}{ll} (A) & \mathbb{E}\langle M\rangle_t < \infty, \\ (B) & M^t := (M_{t\wedge s})_{s\ge 0} \in \mathcal{H}^0, \end{array}$$

äquivalent sind. Gilt (A) für alle $t > 0$, dann ist nach Proposition 1.53 und Satz 1.70(iii) angewandt auf die gestoppten Martingale M^t, insbesondere der Prozess $M^2 - \langle M\rangle$ ein Martingal und es gilt, da $M_0 = 0$,

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_t].$$

Bei Kriterium (iv) muss man etwas aufpassen. Denn man muß wirklich den Erwartungswert der quadratischen Variation kontrollieren und nicht etwa höhere Momente von M selber. Wenn $M \in \mathcal{M}_0^{\text{loc}}$ können wir *nicht* aus $\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$ (oder Abschätzungen für höhere Momente) schließen, dass M ein Martingal ist (und damit in $\mathcal{H}^0$ ist). Für ein Gegenbeispiel siehe 2.30.

Korollar 1.72. *Wenn $M \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$, dann existiert $\lim_{t\to\infty} M_t$ fast sicher auf der Menge $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\}$.*

Beweis. Wenn wir $T_n := \inf\{t \ge 0 : \langle M\rangle_t \ge n\}$ setzen, dann ist das gestoppte lokale Martingal $M^{T_n} \in \mathcal{H}^0$ nach Satz 1.70(iv). Damit existiert nach Teil (i), $\lim_{t\to\infty} M_t^{T_n}$ fast sicher. Auf der Menge $\langle M\rangle_\infty < \infty$, gibt es ein $n_0 = n_0(\omega)$ so dass $T_n = \infty$ für alle $n \ge n_0$, so dass dann $\lim_{t\to\infty} M_t = \lim_{t\to\infty} M_t^{n_0}$ existiert. □

Kapitel 2

Das stochastische Integral

Auch in diesem Kapitel folgen wir [Sch13]. Wir nehmen an, dass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum ist, der die üblichen Bedingungen aus Definition 1.14 erfüllt.

2.1 Die Konstruktion des stochastischen Integrals

Wir möchten das Integral $t \mapsto \int_0^t f_s(\omega)\, dS_s(\omega)$ für $S \in \mathcal{S}$ ein Semimartingal und f_t aus einer möglichst großen Klasse von Integranden definieren.

Problem: Diese Integral kann nicht pfadweise (also für festes $\omega \in \Omega$) definiert werden. Genauer: nach Definition können wir $S_t = M_t + A_t$ schreiben für $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}, A \in \mathcal{A}$ und dann wird gelten

$$\int_0^t f_s\, dS_s := \int_0^t f_s\, dM_s + \int_0^t f_s\, dA_s. \tag{2.1}$$

Wie wir als nächstes sehen werden, kann das zweite Integral in (2.1) ohne Probleme ω-weise als Lebesgue-Stieltjes Integral definiert werden. Danach wird der Hauptfokus in diesem Kapitel die Konstruktion des Integral bezüglich des Martingals sein.

Definition 2.1. Gegeben sei eine rechtsstetige Funktion g von beschränkter Variation mit Zerlegung $g = g^+ - g^-$ für wachsende, rechtsstetige Funktionen g^+, g^- mit $g_0 = g^+ = g^- = 0$. Dann definieren wir Maße μ^+, μ^- auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ via

$$\mu^+((a,b]) = g_b^+ - g_a^+ \quad \text{und} \quad \mu^-((a,b]) = g^-(b) - g^-(a)$$

für alle $0 \leq a < b$. Wenn $(f_s)_{s\geq 0}$ messbar ist, dann ist das *Lebesgue-Stieltjes Integral* von f bezüglich g definiert als

$$\int_{(0,t]} f_s\, dg_s := \int_{(0,t]} f_s\, d\mu^+(s) - \int_{(0,t]} f_s\, d\mu^-(s),$$

solange die rechte Seite nicht von der Form $\infty - \infty$ oder $-\infty - (-\infty)$ ist.

Bemerkung 2.2. Der Wert des Integrals $\int f\,dg$ hängt nicht von der Zerlegung g^+, g^- ab. Ist die Funktion g sogar stetig, dann hat das Maß μ keine Atome und wir können $\int_{(0,t]} f_s\,dg_s = \int_0^t f_s\,dg_s$ schreiben und das Integral ist stetig in t.

Definition 2.3. Wenn $(f_s)_{s\geq 0}$ ein adaptierter, linksstetiger, lokal beschränkter stochastischer Prozess ist und $A \in \mathcal{A}^0$, dann definieren wir das *stochastische Integral* von f bezüglich A als

$$(f\cdot A)_t(\omega) := \int_0^t f_s(\omega)\,dA_s(\omega) \quad \text{für alle } t \geq 0,\ \omega \in \Omega.$$

Satz 2.4. *Für f und A wie in Definition 2.3 gilt*

$$(f\cdot A)_t = \lim_{\|\Delta\|\to 0, \Delta\in\mathcal{D}} \sum_{t_i\in\Delta, t_{i+1}\leq t} f_{t_i}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}). \tag{2.2}$$

und $f\cdot A \in \mathcal{A}$.

Beweis. Um (2.2) zu beweisen, betrachten wir $f_s^\Delta = \sum_{t_i\in\Delta} f(t_i)\mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(s)$. Da f linksstetig ist, folgt für jedes $s \geq 0$,

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} f_s^\Delta = f_s. \tag{2.3}$$

Dann ist wenn μ das zu A gehörige Maß definiert

$$\sum_{t_i\in\Delta, t_i\leq t} f_{t_i}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) = \int_0^t f_s^\Delta\,dA_s = \int_0^t f_s^\Delta\,d\mu(s).$$

Da f lokal beschränkt ist, gibt es ein $C_t > 0$, so dass $\sup_{s\in[0,t]} f_s \leq C_t$ und damit auch $f_s^\Delta \leq C_t$ für alle $s \in [0,t]$. Wegen majorisierter Konvergenz und (2.3) gilt

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \int_0^t f_s^\Delta\,d\mu(s) = \int_0^t f_s\,d\mu(s) = (f\cdot A)_t.$$

Dies zeigt (2.2).

Da die Approximation auf der rechten Seite, für jedes Δ, $\mathcal{F}_t$-messbar ist, ist auch $(f\cdot A)_t$ $\mathcal{F}_t$-messbar, also ist $f\cdot A$ adaptiert. Da A stetig, ist nach Bemerkung 2.2 auch $f\cdot A$ stetig. Schließlich gilt

$$\int_0^t f_s\,dA_s = \int_0^t f_s^+\,dA_s - \int_0^t f_s^-\,dA_s,$$

und die Integranden positiv sind, sind die beiden Integral auf der linke Seite wachsende Funktionen in t und damit ist $f\cdot A$ von beschränkter Variation und damit $f\cdot A \in \mathcal{A}^0$. $\square$

Wir möchten nun das stochastische Integral $f\cdot M$ für $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^0$ definieren. Wir behandeln zunächst den Fall, dass $M \in \mathcal{H}^0$ ist und f elemntar im folgenden Sinn ist.

Definition 2.5. Ein stochastischer Prozess $f : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Elementarprozess*, kurz $f \in \mathcal{L}_e$, wenn es eine Partition $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots\}$ mit $t_n \to \infty$ und eine Folge von Zufallsvariablen $(\xi_i)_{i\geq -1}$ gibt, so dass

$$f_t(\omega) = \xi_{-1}(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega)\mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \quad \text{für alle } t \geq 0, \omega \in \Omega.$$

Weiter sei ξ_{-1} bezüglich $\mathcal{F}_{t_0}$ und ξ_i bezüglich $\mathcal{F}_{t_i}$ messbar und es gibt ein $C < \infty$ so, dass $\sup_{n\geq 0} |\xi_n(\omega)| \leq C$ für alle $\omega \in \Omega$.

Für $f \in \mathcal{L}_e$ können wir das stochastische Integral definieren als

$$I_t(f) := \int_0^t f_s\,dM_s := \sum_{i\geq 0} \xi_i(M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}) \quad \text{für } t \geq 0. \tag{2.4}$$

Kurz werden wir häufig auch $f \cdot M := I_.(f)$ schreiben.

Proposition 2.6. *Für $M \in \mathcal{H}^0$ und $f \in \mathcal{L}_e$ gilt*

(i) $f \cdot M \in \mathcal{H}^0$,

(ii) $\langle f \cdot M\rangle_t = \int_0^t f_s^2\,d\langle M\rangle_s$.

(iii) $\|f \cdot M\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E}\int_0^\infty f_s^2\,d\langle M\rangle_s$.

Beweis. (i) Offensichtlich ist $f\cdot M$ adaptiert, hat stetige Pfade und $(f\cdot M)_0 = 0$. Außerdem ist $f \cdot M$ L^2 beschränkt, denn es gilt (wobei wir annehmen, dass $t_n = t$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(I_t(f))^2] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\Big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{i,k=0}^{n-1} \xi_i\xi_k(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\Big] \leq C\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{n-1} M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2\Big] = C\mathbb{E}[M_t^2].
\end{aligned}$$

Da aber M L^2-beschränkt ist, gilt dies auch für $f \cdot M$.

Um die Martingaleigenschaft zu zeigen, betrachten wir $s < t$ und $k \leq n$, so dass $s \in [t_k, t_{k+1})$ und $t \in [t_n, t_{n+1})$. Für $k < n$ gilt

$$\begin{aligned}
(f \cdot M)_t - (f \cdot M)_s &= \sum_{i=k}^{n-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n(M_t - M_{t_n}) - \xi_k(M_s - M_{t_k}) \\
&= \sum_{i=k+1}^{n-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n(M_t - M_{t_n}) + \xi_k(M_{t_{k+1}} - M_s).
\end{aligned}$$

Dann ist der bedingte Erwartungswert der rechte Seite bezüglich $\mathcal{F}_s$ offensichtlich $= 0$. Für $k = n$ gilt

$$\mathbb{E}[(f \cdot M)_t - (f \cdot M)_s \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\xi_n(M_t - M_s) \,|\, \mathcal{F}_s] = \xi_n \mathbb{E}[M_t - M_s \,|\, \mathcal{F}_s] = 0.$$

Damit ist $f \cdot M$ ein Martingal und schließlich in $\mathcal{H}^0$.

(ii), (iii) *Übungsaufgaben.* □

Der letzte Teil besagt, dass die Abbildung $I : f \mapsto f \cdot M$ eine Isometrie von $\mathcal{L}_e$ nach $\mathcal{H}^0$ beschreibt, vorausgesetzt wir können auf $\mathcal{L}_e$ eine geeignete Norm festlegen.

Definition 2.7. Es sei $M \in \mathcal{H}^0$. Das *Doléans-Maß* μ_M auf $([0,\infty) \times \Omega, \mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{F})$ ist definiert via

$$\mu_M(A) := \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty \mathbb{1}_A(s,\omega)\, d\langle M\rangle_s(\omega)\Big], \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{F}.$$

Weiter sei

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}(M) &:= \mathcal{L}^2([0,\infty) \times \Omega, \mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{F}, \mu_M) \\ &= \{f : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ messbar und } \int f^2 \, d\mu_M < \infty\}\text{'}\end{aligned}$$

der zugehörige $\mathcal{L}^2$-Raum mit Halbnorm $\|\cdot\|_M$.

Wir bemerken, dass μ_A ein endliches Maß ist mit Gesamtmasse $\mu_M([0,\infty)\times\Omega) = \mathbb{E}\langle M\rangle_\infty$. Es gilt, dass $\mathcal{L}_e$ ein Teilraum von $\bar{\mathcal{L}}(M)$ ist. Denn nach Proposition 2.6 gilt für $f \in \mathcal{L}_e$

$$\|f\|_M^2 = \int f_s^2(\omega)\, d\mu_M(s,\omega) = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty f_s^2(\omega)\, d\langle M\rangle_s\Big] = \mathbb{E}[(f \cdot M)_\infty] = \|(f \cdot M)\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (2.5)$$

welches endlich ist, da $f \cdot M \in \mathcal{H}^0$.

Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen bezüglich $\|\cdot\|_M$ mit $\bar{L}(M)$, L_e etc. (konkret: $f \sim g$ genau dann, wenn $\|f - g\|_M = 0$). Dann ist $\bar{L}(M)$ ein Hilbert-Raum mit Norm $\|\cdot\|_M$.

Teil (iii) der Proposition 2.6 (siehe auch (2.5)) liefert nun das folgende Korollar.

Korollar 2.8. *Die Abbildung $I : L_e \to \mathcal{H}^0$ definiert durch* (2.4) *ist eine Isometrie (wobei L_e die Norm $\|\cdot\|_M$ erhält).*

Beweis. Um zu sehen, dass I wohl-definiert ist, betrachten wir $f, g \in \mathcal{L}_e$ mit $\|f - g\|_M = 0$. Dann gilt nach (2.5), dass $\|(f-g)\cdot M\|_{\mathcal{H}} = 0$. Daraus folgt nach Satz 1.70, dass $f \cdot M = g \cdot M$ fast sicher, so dass $I : L_e \to \mathcal{H}$ wohl-definiert ist. Die Eigenschaft der Isometrie folgt direkt aus (2.5). □

Wir möchten das stochastische Integral für eine möglichst große Klasse von Integranden definieren. Dazu nutzen wir: Eine Isometrie von einem metrischen Raum in einen vollständigen metrischen Raum kann immer auf die Vervollständigung des ersten Raums fortgesetzt werden.

Lemma 2.9. *Gegeben seien zwei vollständige metrische Räume* (X, d_X) *und* (Y, d_Y). *Wenn* $A \subset X$ *und* $I : A \to Y$ *eine Isometrie ist, dann können wir* I *eindeutig zu einer Isometrie* $\bar{I} : \bar{A} \to Y$ *auf dem Abschluß* $\bar{A}$ *von* A *fortsetzen.*

Beweis. Angeonmmen $(x_n) \subset A$ konvergiert gegen $x \in X$. Dann setzen wir $y_n = I(x_n)$ und da I eine Isometrie ist, gilt

$$d_Y(y_n, y_m) = d_Y(f(x_n), f(x_m)) = d_X(x_n, x_m).$$

Damit ist (y_n) eine Cauchyfolge in Y und konvergiert wegen der Vollständigkeit von Y gegen ein $y \in Y$. Wir definieren $\bar{I}(x) = y$. Diese Abbildung ist wohl-definiert, dann wenn $x \in \bar{A}$ und $x_n \to x$ und $x'_n \to x$, dann gilt

$$d_Y(I(x'_n), I(x_n)) = d_X((x_n, x'_n) \leq d_X(x_n, x) + d_X(x'_n, x) \to 0.$$

$\bar{I}$ ist eine Fortsetzung von I und auch die Isometrieeigenschaft überträgt sich direkt. Zur Eindeutigkeit: wenn $x \in A$, dann gibt es eine Folge (x_n) in A ist, so dass $x_n \to x$. Dann gilt für eine weiteren Kandidaten $\tilde{I}$, dass

$$d_Y(\tilde{I}(x_n), \tilde{I}(x)) = d_{\bar{X}}(x_n, x) \to 0.$$

D.h. $\tilde{I}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{I}(x_n) = \lim_{n\to\infty} I(x_n) = \bar{I}(x)$. □

Wir bezeichnen nun mit $L_*(M)$ den Abschluss von L_e in dem Hilbertraum $\bar{L}(M)$.

Definition 2.10. Für $M \in \mathcal{H}^0$ definieren wir das *stochastische Integral* $I(f)$ für $f \in L_*(M)$ als die eindeutige Fortsetzung von $I : L_e \to \mathcal{H}^0$ zu einer (linearen) Isometrie von $L_*(M) \to \mathcal{H}^0$. Diese Fortsetzung bezeichnen wir auch mit I. Häufig schreiben wir auch

$$f \cdot M := I(f).$$

Bemerkung 2.11. Im Allgemeinen gilt nicht, dass $L_*(M) = \bar{L}(M)$. Dazu betrachte man $L_{**}(M)$ den abgeschloßenen[1] Teilraum von $\bar{L}(M)$, der alle progressiv messbaren Prozesse enthält (noch genauer, der alle Äquivalenzklassen enthält, die mindestens einen Repräsentaten enthalten, der progressiv-messbar ist). Nun gilt, dass $L_e \subset L_{**}(M)$, da jeder links-stetige adaptierte Prozess progressiv ist nach Proposition 1.25. Insbesondere gilt auch $L_*(M) \subset L_{**}(M)$. Allerdings gibt es auch nicht progressive Prozesse, die aber dennoch in $\bar{L}(M)$ liegen.

Alle konstruierten Räume hängen ab von der Wahl von M. Denn es kann sein, dass $\bar{L}(M)$ sowohl progressive als auch nicht progressive Prozesse enthält. Als triviales Beispiel nehme man $M \equiv 0$, dann ist $\mu = 0$ und alle Prozesse in $\bar{L}(M)$ sind äquivalent. ⋄

[1] Dies folgt daraus, dass $\mathcal{L}^2([0,\infty) \times \Omega, \sigma(\text{ progressiv messbare Fkt.}), \mu_M)$ bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_M$ vollständig ist, siehe Theorem 6.9 in [Gär08].

Nach der abstrakten Definition 2.10 werden wir als nächstes den Raum $L_*(M)$ expliziter charakterisieren.

Definition 2.12. Die σ-Algebra auf $[0,\infty)\times\Omega$, die erzeugt wird durch Mengen der Form $(s,t]\times A$, für $0\le s\le t$ und $A\in\mathcal{F}_s$ heißt die *vorhersagbare σ-Algebra $\mathcal{P}$*. Ein stochastischer Prozess heißt *vorhersagbar* (oder previsibel) falls er messbar ist bezüglich der vorhersagbaren σ-Algebra.

Zur Erinnerung: gegeben eine Familie F von reelwertigen, messbaren stochastischen Prozessen, bezeichnen wir mit $\sigma(F)$ die kleineste σ-Algebra auf $[0,\infty)\times\Omega$, für die alle Prozesse in F messbar sind.

Proposition 2.13. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \sigma(\mathcal{L}_e) = \sigma(\text{ auf } (0,\infty) \text{ linksstetige, adaptierte Prozesse })\\ &= \sigma(\text{ stetige, adaptierte Prozesse }).\end{aligned}$$

Beweis. Wir bezeichnen die σ-Algebren von links nach rechts mit $\Gamma_1,\dots,\Gamma_4$. Offensichtlich ist $\Gamma_1=\Gamma_2$. Weiterhin ist $\Gamma_4\subset\Gamma_3$.

Nun gilt, dass $\Gamma_3\subset\Gamma_2$, denn jeder (beschränkte) linksstetige Prozess X ist der punktweise Grenzwert von

$$X_t^n(\omega) = X_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/n}(\omega)\mathbb{1}_{(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}(t)\in\mathcal{L}_e.$$

Schließlich kann die Funktion $\mathbb{1}_{(u,v]}$ durch stetige Funktion f^n mit Träger in $(u,v+\frac{1}{n})$ approximiert werden. Wenn also $H\in\mathcal{F}_u$, dann ist Hf^n stetig und adaptiert, also ist $H\mathbb{1}_{(u,v]}$ Γ_4 messbar. D.h. $\Gamma_1\subset\Gamma_4$. □

Proposition 2.14. *Angenommen wir haben k Martingale $M^i\in\mathcal{H}^0$, $i\in\{1,\dots,k\}$. Gegeben f vorhersagbar und $f\in\bar{\mathcal{L}}(M^i)$ für alle i, gibt es eine Folge $f^n\in\mathcal{L}_e$ so dass $\|f-f^n\|_{M^i}\to 0$ für alle i. Insbesondere besteht $L_*(M^1)$ gerade aus den Äquivalenzklassen in $\bar{L}(M^1)$, die mindestens einen vorhersagbaren Prozess enthalten.*

Beweis. Wir bezeichnen mit

$$V=\{f \text{ beschränkt, vorhersagbar und es gibt } f^n \text{ wie behauptet }\}.$$

Dann ist V linear und enthält die konstante Abbildung $\mathbb{1}$. Weiter sei

$$K=\{\mathbb{1}_{(s,t]\times A} : 0\le s<t, A\in\mathcal{F}_s\}.$$

Dann gilt $\sigma(K)=\mathcal{P}$, K ist multiplikativ und $K\subset V$. Aus dem Satz über monotone Klassen, Satz A.1 folgt, dass V alle beschränkten, vorhesagbaren Abbildung enthält, wenn wir zeigen können, dass wenn $g^n \uparrow g$, $g^n \geq 0$ und $g^n \in V$, g beschränkt, dass dann $g \in V$. Da $g = \lim_{n\to\infty} g^n$ ist g vorhersagbar und nach majorisierter Konvergenz gilt $\|g - g^n\|_{M^i} \to 0$. Wenn $g^n_k \in \mathcal{L}_e$ die Funktion g^n approximiert, dann können wir k_n finden, so dass $\|g^n_{k_n} - g^n\|_M \leq \frac{1}{n}$ und daraus folgt dann mit der Dreiecksungleichung, dass $\|g^n_{k_n} - g\| \to 0$, wie gefordert.

Für allgemeines f ist $f^N = f\mathbb{1}_{\{|f|\leq N\}} \in V$ und nach montoner Konvergez gilt $\|f - f^n\|_M \to 0$. Wie oben folgt dann, dass f durch eine Folge $\tilde{f}^n \in \mathcal{L}_e$ approximiert werden kann.

Wenn wir mit $L_{\mathcal{P}}(M)$ den (abgeschlossenen) Teilraum von $\bar{L}(M)$ bezeichnen, der alle Äquivalenzklassen enthält, die mindestens einen vorhersagbares Element enthält, dann haben wir gezeigt, dass $L_{\mathcal{P}}(M) \subset L_*(M)$. Andererseits ist nach Proposition 2.13, $L_e \subset L_{\mathcal{P}}(M)$ und da $L_{\mathcal{P}}(M)$ abgeschlossen ist folgt $L_*(M) \subset L_{\mathcal{P}}(M)$. □

Bemerkung 2.15. Da jeder linksstetige, adaptierte Prozess progressiv messbar ist nach Satz 1.25, ist auch jeder vorhersagbare Prozess progressiv messbar. Die Umkehrung gilt nicht: Nicht jeder vorhersagbare Prozess ist progressiv messbar, allerdings wird in [KS91, Lemma 3.2.7] gezeigt, dass $L_{**}(M) = L_*(M)$, d.h. also jede Äquivalenzklasse in $L_*(M)$ enthält ein progressiv messbares Element. Diese Aussage gilt nicht für nicht-stetige Martingale.

Als nächsten Schritt möchten wir die Klasse der Integratoren von $\mathcal{H}^0$ auf $\mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ erweitern. Vorher halten wir eine Abschätzung für das stochastische Integral fest, die nicht nur bei der Erweiterung nützlich ist.

Da die quadratische Variation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinear, symmetrisch und positiv semidefinit ist, gilt die normale Cauchy-Schwarz Ungleichung, d.h. für $M, N \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ und $s < t$ gilt fast sicher

$$|\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s| \leq \sqrt{\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s}\sqrt{\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s}.$$

(um dieses zu zeigen kann man den klassischen Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung für eine 'normales' Skalarprodukt übernehmen). Nach Satz 1.70 folgt daraus für $M, N \in \mathcal{H}^0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\sup_{t\geq 0} |\langle M, N\rangle_t|\Big] &\leq \mathbb{E}\Big[\sup_{t\geq 0} \sqrt{\langle M\rangle_t}\sqrt{\langle N\rangle_t}\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\sqrt{\langle M\rangle_\infty}\sqrt{\langle N\rangle_\infty}\Big] \\ &\leq \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty]^{1/2}\,\mathbb{E}[\langle N\rangle_\infty]^{1/2} = \|M\|_{\mathcal{H}}\|N\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

wobei wir für die letzte Ungleichung Cauchy-Schwarz verwendet haben.

Proposition 2.16 (Kunita-Watanabe Identität und Ungleichung)**.** *Es seien $M, N \in \mathcal{H}^0$ und $f \in L_*(M), g \in L_*(N)$.*

(i) $|((fg) \cdot \langle M, N\rangle)_t|^2 \leq (f^2 \cdot \langle M\rangle)_t (g^2 \cdot \langle N\rangle)_t$ *fast sicher.*

(ii) $\langle f \cdot M, g \cdot N\rangle = (fg) \cdot \langle M, N\rangle$.

(iii) $\mathbb{E}|\langle f \cdot M, g \cdot N\rangle_t| \leq \sqrt{\mathbb{E}(f^2 \cdot \langle M\rangle)_t}\sqrt{\mathbb{E}(g^2 \cdot \langle N\rangle)_t}$

Beweisskizze. (i), (ii) Für $f, g \in L_e$ ist Teil (i) Cauchy-Schwarz und Teil (ii) analog zu Teil (ii) von Proposition 2.6. Der allgemeine Fall folgt durch Approximation.

(iii) Cauchy-Schwarz in Verbindung mit (i) und (ii). □

Bis jetzt haben wir das stochastische Integral $\int f\, dM$ nur für L^2-beschränkte Martingale, also $M \in \mathcal{H}^0$, konstruiert. Allerdings würden wir das ganze gerne auf lokale Martingale erweitern. Dazu betrachten wir

$$\mathcal{L}_{\text{loc}}(M) := \{f \text{ vorhersagbar}^2 : \int_0^t f_s^2\, d\langle M\rangle_s < \infty \text{ für alle } t \text{ fast sicher}\}.$$

Definition 2.17. Für $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^0$ und $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(M)$, sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten so dass $S_n \to \infty$ und $t \mapsto M_{t\wedge S_n}$ in $\mathcal{H}^0$ ist. Dann betrachten wir $R_n := n \wedge \inf\{t \geq 0 : \int_0^t f_s^2\, d\langle M\rangle_s \geq n\}$. Wenn wir $T_n := R_n \wedge S_n$ setzen, dann gilt $T_n \to \infty$ fast sicher und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Stoppzeiten, so dass $M_t^n := M_{t\wedge T_n}$ in $\mathcal{H}^0$ und $f_t^n := f_t \mathbb{1}_{\{t\leq T_n\}}$ in $L_*(M^n)$ ist. Wir definieren

$$(f \cdot M)_t := \int_0^t f_s\, dM_s := (f^n \cdot M^n)_t \quad \text{auf dem Ereignis} \quad \{t \leq T_n\}.$$

Die nächste Proposition besagt, dass das in Definition 2.17 konstruierte stochastische Integral wohl-definiert ist und damit wieder in $\mathcal{M}_{\text{loc}}^0$ liegt. Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Proposition 2.18. *Es seien $M, N \in \mathcal{H}^0$ und $f \in L_*(M), g \in L_*(M)$. Weiter sei T eine Stoppzeit, so dass fast sicher*

$$f_{t\wedge T(\omega)}(\omega) = g_{t\wedge T(\omega)}(\omega); M_{t\wedge T(\omega)}(\omega) = N_{t\wedge T(\omega)}(\omega) \quad \textit{für alle } t \geq 0.$$

Dann gilt fast sicher

$$(f \cdot M)_{t\wedge T} = (g \cdot N)_{t\wedge T} \quad \textit{für alle } t \geq 0.$$

Als Verallgemeinerung von Definitionen 2.3 und 2.17, haben wir nun die folgenden Definition des stochastischen Integrals bezüglich eines Semimartingals.

Definition 2.19. Für $X \in \mathcal{S}$ mit Zerlegung $X = M + A$ und $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^0$, $A \in \mathcal{A}$, können wir für einen vorhersagbaren Prozess $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(M)$, der für fast alle ω lokal beschränkt ist, das *stochastische Integral* definieren als

$$\int_0^t f_s\, dX_s := \int_0^t f_s\, dM_s + \int_0^t f_s\, dA_s.$$

Alternativ schreiben wir auch

$$(f \cdot X)_t := (f \cdot M)_t + (f \cdot A)_t$$

und es gilt $f \cdot M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^0$ und $f \cdot A \in \mathcal{A}^0$.

[2] Alternativ könnte man hier auch progressiv messbar annehmen, siehe Bemerkung 2.15.

Bemerkung 2.20. (a) Bis jetzt haben wir nur gezeigt, dass das Integral $f \cdot A \in \mathcal{A}^0$ wenn f lokal beschränkt, linksstetig und adaptiert ist, siehe Satz 2.4. Insbesondere gilt die Aussage also für Elementarprozesse. Dann zeigt eine einfache Anwendung des Satzes über montone Klassen, Satz A.1, dass die Aussage für beschränkte, vorhersagbare stochastische Prozesse gilt. Nun nehmen wir an, dass $f \geq 0$ vorhersagbar und für fast alle ω lokal beschränkt ist. Dann gilt, wenn A die Zerlegung A^+, A^- mit Maßen $\mu^+, \mu-$ hat, dass fast sicher

$$\int_0^t f_s \, d\mu^+(s) < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^t f_s \, d\mu^-(s) < \infty.$$

Damit ist $\int_0^t f_s \, dA_s$ fast sicher endlich, stetig und von beschränkter Variation. Um zu zeigen, dass der Ausdruck $\mathcal{F}_t$-messbar ist, betrachten wir $f^N := f \mathbb{1}_{f \leq N}$, so dass $(f^N \cdot A) \in \mathcal{A}^0$ und damit adaptiert. Dann konvergiert f^N monoton gegen f und damit $\int_0^t f_s \, dA_s = \lim_{N\to\infty} \int_0^t f_s^N \, dA_s$, so dass $(f \cdot A)_t$ auch $\mathcal{F}_t$-messbar ist. Für allgemeine vorhersagbare, fast sicher lokal beschränkte f folgt die Aussage aus der Zerlegung $f = f^+ - f^-$.

(b) Viele Aussagen über L^2-bechränkte Martingale gelten auch für lokale Martingale, vorausgesetzt es werden keine Erwartungswerte genommen. Dies gilt beispielsweise für die Kunita-Watanabe Ungleichung, Prop. 2.16 (i), (ii). Der Beweis ist wieder mit Hilfe von geeigneten Stopzeiten und unter Verwendung von Bemerkung 1.63(b).

2.2 Die Itô Formel

Die Itô-Formel ist die Kettenregel in der stochastischen Analysis. In Anwendungen ist es eine der am häufigsten verwendeten Werkzeuge.

Als Vorbereitung benötigen wir zwei Resultate, die auch von unabhängigem Interesse sind.

Satz 2.21. *Für jedes n, sei $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots\} \in \mathcal{D}$ so, dass $\|\Delta^n\| \to 0$. Wenn $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^0$ und f adaptiert und stetig ist, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_{t_k^n} (M_{t_{k+1}^n \wedge t} - M_{t_k^n \wedge t}) = \int_0^t f_s \, dM_s,$$

lokal gleichmässig in Wahrscheinlichkeit.

Beweis. Wir halten fest, dass nach Proposition 2.13 f vorhersagbar ist, so dass das stochastische Integral auf der rechten Seite wohl-definiert ist.

Zunächst nehmen wir an, dass $M \in \mathcal{H}^0$ und f zusätzlich beschränkt ist. Für Δ^n betrachten wir die Approximation

$$f_t^n = f_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k\geq 0} f_{t_k^n} \mathbb{1}_{(t_k^n, t_{k+1}^n]}(t).$$

Wegen der Stetigkeit gilt $f^n \to f$ und wegen majorisierter Konvergenz gilt $\|f - f^n\|_M \to 0$. Da $f^n \in \mathcal{L}_e$, konvergieren dann auch die stochastischen Integrale $f^n \cdot M \to f \cdot M$ in $\mathcal{H}^0$ und damit $(f^n \cdot)_t \to (f \cdot M)_t$ in Wahrscheinlichkeit, welches der Aussage des Satzes entspricht.

Die allgemeine Aussage folgt durch geeignetes Stoppen. □

Als nächstes beweisen wir die *partielle Integration* für stochastische Integrale.

Satz 2.22. *Es seien $X, Y \in \mathcal{S}$. Dann gilt*

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

Beweis. Für $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots\} \in \mathcal{D}$, gilt

$$\begin{aligned} X_t Y_t - X_0 Y_0 &= \sum_{k \geq 0} X_{t_{k+1} \wedge t} Y_{t_{k+1} \wedge t} - Y_{t_k \wedge t} X_{t_k \wedge t} \\ &= \sum_{k \geq 0} X_{t_k \wedge t} (Y_{t_{k+1} \wedge t} - Y_{t_k \wedge t}) + \sum_{k \geq 0} Y_{t_k \wedge t} (X_{t_{k+1} \wedge t} - X_{t_k \wedge t}) \\ &\quad + \sum_{k \geq 0} (X_{t_{k+1} \wedge t} - X_{t_k \wedge t})(Y_{t_{k+1} \wedge t} - Y_{t_k \wedge t}). \end{aligned}$$

Nach Satz 2.21 konvergieren die ersten beiden Ausdrücke auf der rechten Seite gegen die stochastischen Integrale, während der letzte Term nach Sätzen 1.65 und Proposition 1.66 gegen $\langle X, Y \rangle_t$ konvergiert (lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit). □

Nun können wir die Itô-Formel, also die Kettenregel für Semimartingale, formulieren.

Satz 2.23. *Es sei $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und $X = (X^1, \ldots, X^d)$ so dass $X^i \in \mathcal{S}$, $i = 1, \ldots, d$. Dann ist $F(X^1, \ldots, X^d) \in \mathcal{S}$ und es gilt*

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}(X_s) \, dX_s^k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_\ell}(X_s) \, d\langle X^k, X^\ell \rangle_s.$$

Bemerkung 2.24. Häufig verwenden wir auch die Kurzschreibweise

$$dF(X_t) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_k}(X_t) \, dX_t^k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_\ell}(X_t) \, d\langle X^k, X^\ell \rangle_t.$$

Ist für alle i $X^i \in \mathcal{A}$, dann fällt der Ausdruck mit den zweiten Ableitung weg und wir erhalten wieder die übliche Kettenregel.

Für den Beweis brauchen wir noch zwei weitere Lemmata.

Lemma 2.25. *Wenn $M \in \mathcal{H}^0, g \in L_*(M)$ und $f \in L_*(g \cdot M)$, dann ist $fg \in L_*(M)$ und*

$$(fg) \cdot M = f \cdot (g \cdot M).$$

Eine analoge Aussage gilt auch für allgemeinere $M \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ und sogar $M \in \mathcal{S}^0$ und allgemeinere Integranden f, g.

Beweis. Wir schreiben $\tilde{M} = g \cdot M$. Dann ist $\mathcal{M} \in \mathcal{H}^0$ und nach Proposition 2.16(ii) gilt $\langle \tilde{M} \rangle = g^2 \cdot \langle M \rangle$. Daraus folgt, dass

$$\mathbb{E} \int_0^\infty (f_s g_s)^2 \, d\langle M \rangle_s = \mathbb{E} \int_0^\infty f_s^2 \, d\langle \tilde{M} \rangle_s < \infty,$$

und damit ist $fg \in L_*(M)$. Wenn wir die Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und mehrmals Proposition 2.16(ii) nutzen, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle (fg) \cdot M - (f \cdot (g \cdot M)) \rangle &= \langle (fg) \cdot M - (f \cdot (g \cdot M)), (fg) \cdot M - (f \cdot (g \cdot M)) \rangle \\
&= \langle (fg) \cdot M \rangle - 2 \langle (fg) \cdot M, (f \cdot (g \cdot M)) \rangle + \langle f \cdot (g \cdot M) \rangle \\
&= (f^2 g^2) \cdot M - 2(f^2 g) \cdot \langle \langle M, g \cdot M \rangle + f^2 \cdot \langle g \cdot M \rangle \\
&= (f^2 g^2) \cdot M - 2(f^2 g) \cdot (g \cdot \langle M \rangle) + f^2 \cdot (g^2 \cdot \langle M \rangle) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt eine entsprechende Assoziativiätregel für das Lebesgue-Stieltjes Integral ausgenutzt haben (folgt direkt aus Radon-Nikodým). Insbesondere gilt auch

$$\langle (fg) \cdot M - (f \cdot (g \cdot M)) \rangle_\infty = 0,$$

und damit nach Satz 1.70 $((fg) \cdot M)_t = (f \cdot (g \cdot M))_t$ fast sicher für alle $t \geq 0$. □

Lemma 2.26. *Es seien $M \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ und $f, f^n, n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{L}_{\text{loc}}(M)$ so dass $f^n \to f$ lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit. Dann konvergiert $f^n \cdot M \to f \cdot M$ lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $f = 0$. Wir betrachten

$$\begin{aligned}
T_m &:= \inf\{s \geq 0 \, : \, |M_s| \geq m \text{ oder } \langle M \rangle_s \geq m\}, \quad M^m_s := M_{s \wedge T_m}, \\
\tau_{m,n} &= \inf\{s \geq 0 \, : \, \int_0^s |f^n_u|^2 \, d\langle M^m \rangle_u \geq \frac{1}{m}\}.
\end{aligned}$$

Für feste $t, \delta > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\Big\{ \sup_{s \in [0,t]} \Big| \int_0^s f^n_u \, dM_u \Big| \geq \delta \Big\} \leq \mathbb{P}\{\tau_{m,n} \wedge T_m \leq t\} + \mathbb{P}\Big\{ \sup_{s \in [0,t]} \Big| \int_0^{s \wedge \tau_{m,n} \wedge T_m} f^n_u \, dM_u \Big| \geq \delta \Big\}.$$

Den letzten Summand können wir abschätzen indem wir zunächst Chebyshev, dann die Doob'sche L^2-Ungleichung und schließlich Proposition 2.16(iii) anwenden:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big\{\sup_{s\in[0,t]}\Big|\int_0^{s\wedge\tau_{m,n}} f_u^n\,dM_u^m\Big|\geq\delta\Big\}\\
&\qquad\leq\frac{1}{\delta^2}\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{s\in[0,t]}\Big|\int_0^s f_u^n\mathbb{1}_{[0,\tau_{m,n}]}\,dM_u^m\Big|\Big)^2\Big]\\
&\qquad\leq\frac{4}{\delta^2}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t f_u^n\mathbb{1}_{[0,\tau_{m,n}]}\,dM_u^m\Big)^2\Big]=\frac{4}{\delta^2}\mathbb{E}\Big[\int_0^t (f_u^n)^2\mathbb{1}_{[0,t_{m,n}]}\,d\langle M^n\rangle_u\Big]\leq\frac{4}{\delta^2 m}.
\end{aligned}$$

Gegeben $\varepsilon,\delta>0$, können wir m so wählen, dass $\mathbb{P}\{T_m\leq t\}\leq\frac{\varepsilon}{3}$ und $\frac{4}{\delta^2 m}\leq\frac{\varepsilon}{3}$. Da $f_n\to 0$ lokal gleichmässig in Wahrscheinlichkeit, können wir n_0 so wählen, dass für $n\geq n_0$

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{s\in[0,t]}|f_s^n|\geq\frac{1}{m}\Big\}\leq\frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun gilt, wenn $\sup_{s\in[0,t]}|f_s^n|\leq\frac{1}{m}$, nach Definition von T_m

$$\int_0^t|f_s^n|^2\,d\langle M^m\rangle_s\leq\frac{1}{m^2}\langle M\rangle_{t\wedge T_m}\leq\frac{m}{m^2}=\frac{1}{m}.$$

D.h. also $\tau_{m,n}\geq t$. Daraus schließen wir, dass für alle $n\geq n_0$,

$$\mathbb{P}\{\tau_{m,n}\leq t\}\leq\mathbb{P}\Big\{\sup_{s\in[0,t]}|f_s^n|\geq\frac{1}{m}\Big\}\leq\frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt zusammen mit dem ersten Teil

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{s\in[0,t]}\Big|\int_0^s f_u^n\,dM_u\Big|\geq\delta\Big\}\leq\varepsilon,$$

wie gefordert. □

Beweis von Satz 2.23. Wir zeigen zunächst, dass die Aussage des Satzes für Polynome in $x_1,\ldots,x_n$ gilt.

Dazu bemerken wir zunächst, dass die Formel gilt wenn $F(x)=x_i$ für ein $i\in\{1,\ldots,d\}$. Nun nehmen wir an, dass die Aussage für $F,G\in C^2$ gilt und wollen zeigen, dass sie dann auch für FG gilt. Wir schreiben $F:=F(X_\cdot)$ und $\partial_{x_k}F:=\frac{\partial F}{\partial x_k}$, solange klar ist, was gemeint ist. Unsere Annahme können wir also formulieren als:

$$\begin{aligned}
F(X_t)&=F(X_0)+\sum_k\big(\partial_{x_k}F\cdot X^k\big)_t+\frac{1}{2}\sum_{k,\ell}\big(\partial_{x_k x_\ell}F\cdot\langle X^k,X^\ell\rangle\big)_t\\
G(X_t)&=G(X_0)+\sum_k\big(\partial_{x_k}G\cdot X^k\big)_t+\frac{1}{2}\sum_{k,\ell}\big(\partial_{x_k x_\ell}G\cdot\langle X^k,X^\ell\rangle\big)_t
\end{aligned}\tag{2.7}$$

Nach partieller Integration, Satz 2.22 gilt nun

$$F(X_t)G(X_t) - F(X_0)G(X_0) = (F \cdot G)_t + (G \cdot F)_t + \langle F, G\rangle_t. \tag{2.8}$$

Wir betrachten zunächst die quadratische Variation: Nach (2.7) gilt, da die Integrale bezüglich $\langle X^k, X^\ell\rangle$ endliche Variation haben und wegen der Bilinearität, dass

$$\begin{aligned}\langle F, G\rangle_t &= \sum_k \sum_\ell \Big\langle \big(\partial_{x_k} F \cdot X^k\big), \big(\partial_{x_\ell} G \cdot X^\ell\big) \Big\rangle_t \\ &= \sum_{k,\ell} \big(\partial_{x_k} F \partial_{x_\ell} G \cdot \langle X^k X^\ell\rangle\big)_t,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Kunita-Watanabe Identität 2.16 benutzt haben. Für das erste stochastische Integral auf der linke Seite von (2.8) gilt wegen der Bilinearität und Lemma 2.25

$$\begin{aligned}(F \cdot G)_t &= \sum_k \big(F \cdot \big(\partial_{x_k} G \cdot X^k\big)\big)_t + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \big(F \cdot \big(\partial_{x_k x_\ell} G \cdot \langle X^k, X^\ell\rangle\big)\big)_t \\ &= \sum_k \big(F\partial_{x_k} G \cdot X^k\big)_t + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \big(F\partial_{x_k x_\ell} G \cdot \langle X^k, X^\ell\rangle\big)_t\end{aligned}$$

Eine analoge Aussage gilt für $(G\cdot F)$ und damit folgt insgesamt aus (2.8) und der Standard-Produktregel

$$F(X_t)G(X_t) - F(X_0)G(X_0) = \sum_k (\partial_{x_k}(FG) \cdot X^k)_t + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} (\partial_{x_k x_\ell}(FG) \cdot \langle X^k, X^\ell\rangle)_t.$$

Damit gilt die Itô-Formel auch für das Produkt FG.

Da die Formel für $F(x) = x_i$ gilt und sich die Eigenschaft auf Produkte überträgt, können wir per Induktion schließen, dass sie für alle Polynome gilt.

Nach dem Approximationssatz von Stone-Weierstraß kann man eine beliebige Funktion $F \in C^2$ durch Polynome P_n so approximieren, so dass auch alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen gegen die von F konvergieren. Dabei ist diese Konvergenz gleichmässig auf $[-N, N]^d$. Nun betrachten wir den gestoppten Prozess $X^N = X_{t\wedge T_N}$, wobei $T_N := \inf\{|X_t^i| \geq N \text{ für ein } i \in \{1, \dots, d\}\}$. Nach Lemma 2.26 gilt dann also die Itô-Formel für F und den gestoppten Prozess X^N. Schließlich lassen wir $N \to \infty$ um die allgemeine Aussage zu erhalten. □

Bemerkung 2.27. Die Itô Formel kann auf verschiedene Arten verallgemeinert werden. Z.B. gilt sie immer noch wenn F C^2 auf einer offenen Teilmenge O von $\mathbb{R}^d$ ist und X fast sicher in O bleibt.

Eine erste Anwendung der Itô-Formel:

Satz 2.28 (Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung). *Für $p \geq 2$, gibt es eine Konstante $C_p > 0$ so dass für alle $M \in \mathcal{M}^o_{\text{loc}}$ und $t \geq 0$,*

$$\mathbb{E} \sup_{s \in [0,t]} |M_s|^p \leq C_p \, \mathbb{E} \langle M \rangle_t^{p/2}.$$

Beweis. O.B.d.A. reicht es die Aussage für beschränkte M zu zeigen. Da $p \geq 2$, ist $x \mapsto |x|^p$ in $C^2(\mathbb{R})$, so dass mit Itô, Satz 2.23, folgt

$$|M_t|^p = \int_0^t p|M_s|^{p-1} (\operatorname{sgn} M_s) \, dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t p(p-1)|M_s|^{p-2} \, d\langle M \rangle_s.$$

Da das stochastische Integral $\int \ldots \, dM_s$ ein Martingal mit Start in 0 ist (da M beschränkt ist), gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|M_t|^p &= \frac{1}{2} p(p-1) \mathbb{E} \int_0^t |M_s|^{p-2} \, d\langle M \rangle_s \\
&\leq \frac{1}{2} p(p-1) \mathbb{E} \Big[\sup_{s \in [0,t]} |M_s|^{p-2} \langle M \rangle_t \Big] \\
&\leq \frac{1}{2} p(p-1) \Big(\mathbb{E} \sup_{s \in [0,t]} |M_s|^p \Big)^{\frac{p-2}{p}} \big(\mathbb{E} \langle M \rangle_t^{p/2} \big)^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Hölder mit $p' = \frac{p}{p-2}$ und $q' = \frac{p}{2}$ genutzt haben. Mit der Doob'schen Ungleichung, Satz 1.40, und durch Umstellen erhalten wir die Aussage des Satzes. □

Die Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung gibt uns direkt ein einfaches Kriterium, um zu überprüfen, dass ein stochastisches Integral ein echtes Martingal ist.

Korollar 2.29. *Es seien $M \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ und $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(M)$. Wenn $\mathbb{E} \int_0^t f_s^2 \, d\langle M \rangle_s < \infty$ für jedes $t \geq 0$, dann ist $(\int_0^t f_s \, dM_s)_{t \geq 0}$ ein Martingal, also in $\mathcal{M}^0$.*

Beweis. Nach Proposition 1.53 müssen wir nur überprüfen, dass $\mathbb{E}[\sup_{s \in [0,t]} |(f \cdot M)_s|] < \infty$ für jedes $t \geq 0$. Nun gilt aber nach der Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung, Satz 2.28, mit $p = 2$ dass für $t \geq 0$

$$\mathbb{E} \Big[\sup_{s \in [0,t]} |(f \cdot M)_s| \Big] \leq 1 + \mathbb{E} \Big[\sup_{s \in [0,t]} |(f \cdot M)_s|^2 \Big] \leq 1 + \mathbb{E} \langle f \cdot M \rangle_t = 1 + \mathbb{E} \Big[\int_0^t f_s^2 \, d\langle M \rangle_s \Big],$$

welches nach Annahme endlich ist. □

Beispiel 2.30. Mit Hilfe der Itô-Formel können wir ein Beispiel eines lokalen Martingals konstruieren, das kein Martingal ist.

Wir nehmen an, dass $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$ eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung ist, d.h. B_t^i für $i \in \{1, \dots, d\}$ sind unabhängige $\mathbb{F}$-Brown'sche Bewegungen. Insbesondere gilt also

$$\langle B_t^i, B_t^j \rangle_t = \begin{cases} t & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{wenn } i \neq j, \end{cases}$$

(siehe Bemerkung 1.63 und Übungsaufgabe). Für $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ist die Itô Formel also

$$\begin{aligned} F(B_t) &= F(B_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t \partial_{x_k} F(B_s)\, dB_s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \int_0^t \partial_{x_k x_k} F(B_s)\, ds \\ &= F(B_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t \partial_{x_k} F(B_s)\, dB_s^k + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta F(B_s)\, ds \end{aligned}$$

wobei $\Delta := \sum_k \partial_{x_k x_k}$ den Laplace-Operator bezeichnet.

Gilt für eine Funktion F also, dass $\Delta F = 0$ (solche Funktionen heißen *harmonisch*), dann gilt, dass $F(B)$ eine lokales Martingal ist. Man kann leicht überprüfen, dass für $d \geq 3$ und $z \in \mathbb{R}^d$ die Funktion $F(x) = \frac{1}{|x+z|^{d-2}}$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{-z\}$ harmonisch ist. Man kann zeigen, dass eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung (hier reicht sogar $d \geq 2$) fast sicher keine Punkte trifft, siehe z.B. [MP10, Cor. 2.26]. Damit können wir nach Bemerkung 2.27 die Itô Formel auch hier anwenden und wir sehen, dass $F(B_t)$ ein lokales Martingal ist. Aber $M_t := F(B_t)$ ist kein Martingal, denn man kann ausrechnen, dass $\mathbb{E} M_t \to 0$. Wir wissen aber, dass Martingale konstanten Erwartungswert haben. Außerdem kann man überprüfen, dass M sogar L^2-beschränkt ist (siehe auch Bemerkung 1.71).

Beispiel 2.31. *Exponentielle Martingale.* Für ein lokales Martingal $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^0$ und für $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir das *exponentielle (lokale) Martingal* als

$$\mathcal{E}^\lambda(M)_t := \exp\big\{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M \rangle_t \big\}.$$

Wir behaupten, dass $\mathcal{E}^\lambda(M)$ wieder ein lokales Martingal ist. Hierbei bezeichnen wir ein $\mathbb{C}$-wertiger stochastischen Prozess X als ein Martingal (oder lokales Martingal) wenn die Prozesse des Realteils $\Re e X$ und Imaginärteils $\Im m X$ Martingale (bzw. lokale Martingale) sind.

Es gilt für $f(x, y) = \exp\{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 y\}$, dass

$$\mathcal{E}^\lambda(M)_t = f(M_t, \langle M \rangle_t).$$

Wenn wir nun die Itô Formel, Satz 2.23 (jeweils auf Real- und Imaginärteil) anwenden, dann erhalten wir da $\langle M\rangle \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^\lambda(M)_t - \mathcal{E}^\lambda(M)_0 &= \int_0^t \partial_x f(M_s, \langle M\rangle_s)\, dM_s + \int_0^t \partial_y f(M_s, \langle M\rangle_s)\, d\langle M\rangle_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{xx} f(M_s, \langle M\rangle_s)\, d\langle M\rangle_s \\ &= \int_0^t \lambda \mathcal{E}^\lambda(M)_s\, dM_s - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t \mathcal{E}^\lambda(M)_s\, d\langle M\rangle_s + \frac{1}{2}\lambda^2\int_0^t \mathcal{E}^\lambda(M)_s\, d\langle M\rangle_s \\ &= \int_0^t \lambda\mathcal{E}^\lambda(M)_s\, dM_s.\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{E}^\lambda(M)$ ein lokales Martingal.

2.3 Darstellungssätze für lokale Martingale

Für dieses Teilkapitel folgen wir [RY99].

Definition 2.32. Eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung ist ein stochastischer Prozess $B = (B^1, \dots, B^d)$ so dass B^i unabhängige $\mathbb{F}$-Brown'sche Bewegungen sind. Weiter sagen wir, dass ein d-dimensionaler Prozess $X = (X^1, \dots, X^d)$ ein Martingal/lokales Martingal/Semimartingal ist wenn X^i für alle i ein Martingal/lokales Martingal/Semimartingal ist.

Satz 2.33 (Lévy-Charakterisieriung der Brown'schen Bewegung)**.** *Für einen $\mathbb{F}$-adaptierten, stetigen, $\mathbb{R}^d$-wertigen stochastischen Prozess X mit $X_0 = 0$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(i) X ist eine $\mathbb{F}$-Brown'sche Bewegung.

(ii) X ist ein stetiges lokales Martingal und $\langle X^i, X^j\rangle = \delta_{ij}t$ für alle $i, j \in \{1, \dots, d\}$.

(iii) X ist ein stetiges lokales Martingal, $L^2(\mathbb{R}^+) \subset L^2_{\text{loc}}(X^i)$ und für jede (deterministische) Funktion $f = (f^1, \dots, f^d)$ mit $f^i \in L^2(\mathbb{R}_+)$ ist der Prozess

$$\mathcal{E}^{if}_t = \exp\Big\{i \sum_k \int_0^t f^k_s\, dX^k_s + \frac{1}{2}\sum_k \int_0^t (f^k_s)^2\, ds\Big\},$$

ein ($\mathbb{C}$-wertiges) Martingal.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii) folgt aus Bemerkung 1.63 und einer Übungsaufgabe.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Nach Annahme und da $f^i \in L^2(\mathbb{R}^+)$ gilt $\int_0^t (f^i_s)\, d\langle X^i\rangle_s = \int_0^t (f^i_s)^2\, ds < \infty$, d.h. $f^i \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(X^i)$. Die Aussage, dass $\mathcal{E}^{if}$ ein lokales Martingal ist folgt aus Beispiel 2.31

mit $\lambda = i$ angewandt auf das lokale Martingal $M_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t f_s^i \, dX_s^i$, welches quadratische Variation

$$\langle M \rangle_t = \sum_{k,i} \int_0^t f_s^k f_s^i \, d\langle X^k, X^i \rangle_s = \sum_k \int_0^t (f_s^k)^2 \, ds,$$

hat. Da $\mathcal{E}^{if}$ beschränkt ist (da $\int_0^\infty f_s^2 \, ds < \infty$), ist $\mathcal{E}^{if}$ sogar ein Martingal, nach Proposition 1.53.

(iii) $\implies$ (i) Wir müssen nur zeigen, dass das Inkrement $X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und normalverteilt ist mit $X_t^i - X_s^i \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ und unabhängig.

Wir nutzen, dass die Fouriertransformierte definiert für einen $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable X als

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i(\lambda, X)}], \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}^d,$$

die Verteilung von X eindeutig charakterisiert, siehe z.B. [Als07, Satz 41.10]. Wir schreiben hier $(x, z) = \sum_{i=1}^d x_i z_i$ für das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$.

Nun wählen wir f mit $f^i = \lambda \mathbb{1}_{[0,t]}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^d$ und $T > 0$. Nach Annahme ist dann

$$\mathcal{E}_t^{if} = \exp\left\{ i(\lambda, X_{t \wedge T}) + \frac{1}{2} |\lambda|^2 (t \wedge T) \right\},$$

ein Martingal. Für $A \in \mathcal{F}_s$ und $\mu \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Fouriertransformierte von $(\mathbb{1}_A, X_t^1 - X_s^1, \dots, X_t^d - X_s^d)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{i\mu \mathbf{1}_A} e^{i(\lambda, X_t - X_s)}] &= \mathbb{E}[e^{i\mu \mathbf{1}_A} e^{-i(\lambda, X_s)} \mathbb{E}[e^{i(\lambda, X_t)} \mid \mathcal{F}_s]] \\ &= \mathbb{E}[e^{i\mu \mathbf{1}_A} e^{-i(\lambda, X_s)} e^{i(\lambda, X_s) - \frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s)}] = \mathbb{E}[e^{i\mu \mathbf{1}_A}] e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Mit $A = \emptyset$ folgt

$$\mathbb{E}[e^{i(\lambda, X_t - X_s)}] = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s)},$$

welches der Fouriertransformierten eines Vektor mit unabhänigen $\mathcal{N}(0, t-s)$-verteilten Einträgen entspricht und damit die Verteilung des Inkrements eindeutig festlegt. Weiter folgt aus (2.9) für allgmeines $A \in \mathcal{F}_s$, dass $\mathbb{1}_A$ und $X_t - X_s$ unabhängig sind. Da $A \in \mathcal{F}_s$ beliebig war, folgt die Unabhängigkeit von $X_t - X_s$ und $\mathcal{F}_s$. □

Wir behaupten nun, dass jedes lokale Martingal bis auf eine Zeittransformation eine Brown'sche Bewegung ist.

Satz 2.34 (Dambis, Dubins-Schwarz). *Es sei $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^0$ mit $\langle M \rangle_\infty = \infty$, wenn wir*

$$T_t = \inf\{s \geq 0 \, : \, \langle M \rangle_s > t\},$$

definieren, dann ist $B_t := M_{T_t}$ eine $(\mathcal{F}_{T_t})_{t \geq 0}$-Brown'sche Bewegung und $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$.

Wir skizzieren nur die einzelnen Beweisschritte, für einen vollständigen Beweis, siehe [RY99, Thm. V.1.6].

Beweisskizze. Die Zeitumkehrung T_t ist eine allgemeinerte Inverse von $\langle M\rangle$. Daraus folgt, dass T_t wachsend und rechtsstetig ist. Weiter kann man zeigen, dass T_t ein Stoppzeit ist. Wenn man nun ausnutzt, dass M auf einem Intervall $[a, b]$ genau dann konstant ist, wenn $\langle M\rangle_a = \langle M\rangle_b$, dann kann man mit Optional Sampling, Satz 1.36, zeigen, dass $B_t := M_{T_t}$ wieder ein lokales Martingal (bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_{T_t})_{t\geq 0}$ ist und $\langle B\rangle_t = \langle M\rangle_{T_t} = t$. Nach der Lévy-Charakterisierung, Satz 2.33 folgt, dann dass B eine Brown'sche Bewegung ist.

Für den letzten Punkt, dass $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$ nutzt man wieder, dass M genau dann konstant ist, wenn die quadratische Variation konstant bleibt. □

Bemerkung 2.35. Falls $\langle M\rangle_\infty < \infty$ eintreten kann, so kann man dennoch eine analoge Aussage zu Satz 2.34 zeigen. Allerdings muss man dazu den Wahrscheinlichkeitsraum erweitern. Genauer gibt es eine Vergrößerung des Wahrscheinlichkeitsraums $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}_t, \tilde{P})$ und eine Brown'sche Bewegung $\tilde{B}$ auf $\tilde{\Omega}$ (die unabhängig ist von M), so dass der Prozess

$$B_t = \begin{cases} M_{T_t} & \text{wenn } t < \langle M\rangle_\infty \\ M_\infty + \tilde{B}_{t-\langle M\rangle_\infty} & \text{wenn } t \geq \langle M\rangle_\infty, \end{cases}$$

eine (Standard)-Brown'sche Bewegung ist. Die Tatsache, dass M_∞ existiert auf $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\}$ folgt aus Korollar 1.72. Dass die Erweiterung nötig ist, sieht man beispielsweise an dem Beispiel, wenn Ω aus einem Punkt besteht und $M \equiv 0$.

Kapitel 3

Stochastische Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden wir Lösungen X für die *stochastische Differentialgleichung* (SDGL)

$$dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t, \quad X_0 = \xi \tag{3.1}$$

analysieren. Dabei ist die Lösung ein d-dimensionaler, stetiger Prozess X. W ist eine m-dimensionale Brown'sche Bewegung und ξ eine von W unabhängiger d-dimensionaler Vektor mit Verteilung μ. Die *Koeffizienten* sind für $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ eine reelle $d \times m$-Matrix $\sigma(t,x) = (\sigma_{ij}(t,x))$ und ein d-dimensionaler reeler Vektor $b(t,x) = (b_i(t,x))$, so dass $(t,x) \mapsto \sigma_{ij}(t,x)$ und $(t,x) \mapsto b_i(t,x)$ messbar sind.

Komponentenweise geschrieben meint (3.1) für $i \in \{1, \ldots, d\}$:

$$dX_t^i = b_i(t, X_t)\,dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}(t, X_t)\,dW_t^k, \quad X_0^i = \xi^i.$$

Dies ist die Kurzschreibweise für

$$X_t^i = \xi^i + \int_0^t b_i(s, X_s)\,ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{ik}(s, X_s)\,dW_s^k, . \tag{3.2}$$

Beispiel 3.1. *Lineare stochastische Differentialgleichungen.* Mit $d = m = 1$: Wir betrachten die *lineare* SDGL:

$$dX_t = (aX_t + b)dt + (\alpha X_t + \beta)\,dW_t, \quad X_0 = x$$

für W eine 1-dimenisonale Brown'sche Bewegung. Wir behaupten diese Gleichung wird gelöst durch

$$X_t = Z_t\Big(x + (b - \alpha\beta)\int_0^t \frac{1}{Z_u}\,du + \beta\int_0^t \frac{1}{Z_u}\,dW_u\Big),$$

wobei

$$Z_t = \exp\Big((a - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha W_t\Big).$$

In der Tat zunächst gilt $Z_0 = 0$ und damit $X_0 = x$. Dann gilt mit Itô:

$$dZ_t = (a - \frac{1}{2}\alpha^2)Z_t\,dt + \alpha Z_t\,dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 Z_t\,dt = aZ_t\,dt + \alpha Z_t\,dW_t. \tag{3.3}$$

Daraus folgt dann mit partieller Integration, wenn wir $Y_t := X_t/Z_t$ schreiben:

$$\begin{aligned} dX_t = d(Z_tY_t) &= Z_t\,dY_t + Y_t\,dZ_t + \langle Z, Y\rangle_t \\ &= Z_t(b - \alpha\beta)\frac{1}{Z_t}\,dt + Z_t\beta\frac{1}{Z_t}\,dW_t + aY_tZ_t\,dt + \alpha Y_tZ_t\,dW_t + \alpha\beta Z_t\frac{1}{Z_t}\,dt \\ &= b\,dt + aX_t\,dt + \beta\,dW_t + \alpha X_t\,dW_t, \end{aligned}$$

wie behauptet. Wir werden später sehen, dass diese Lösung auch eindeutig ist.

Zwei Speziallfälle tauchen häufiger auf:

Wenn $b = \beta = 0$, dann ist $X_t = xZ_t$ eine *geometrische Brown'sche Bewegung*. Diese spielt eine große Rolle in der mathematischen Modellierung von Finanzmärkten.

Wenn $b = 0, \alpha = 0$, dann ist

$$X_t = e^{at}(x + \beta\int_0^t e^{-as}\,dW_s).$$

Dies ist der *Ornstein-Uhlenbeck Prozess*. Seine besondere Eigenschaft ist, dass dies ein Gauß'scher Prozess ist, d.h. X_t ist für jedes t Normalverteilt.

Meistens kann man SDGL nicht so direkt lösen.

Hauptreferenz für dieses Kapitel ist Kapitel 5 in [KS91].

3.1 Starke Lösungen

Es gibt verschiedene Lösungskonzepte für SDGLs, wir beginnen mit starken Lösungen und der Theorie, die von Itô entwickelt wurde.

Wir wählen einen vollständigen[1] Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf dem eine m-dimensionale Brown'sche Bewegung W und eine davon unabhängige Zufallsvariable ξ definiert sind. Wir betrachten die Filtration

$$\mathcal{G}_t = \sigma(\xi, W_s\,:\, 0 \le s \le t).$$

Wenn wir diese um die Nullmengen

$$\mathcal{N} := \{N \subset \Omega\,:\, \text{ es gibt } G \in \mathcal{G}_\infty\,:\, N \subset G \text{ und } \mathbb{P}(G) = 0\}$$

[1] d.h. wenn $A \subset N$ für $N \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(N) = 0$, dann ist auch $A \in \mathcal{F}$.

erweitern, erhalten wir

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{G}_{t+}, \mathcal{N}).$$

Mit dieser Notation ist W eine $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$- und auch eine $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Brown'sche Bewegung.

Definition 3.2. Eine *starke Lösung* der stochastischen Differentialgleichung (3.1) auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bezüglich der Brown'schen Bewegung W und der Anfangsbedingung ξ ist ein stetiger, d-dimensionaler stochastischer Prozess X mit den folgenden Eigenschaften:

(i) X ist adaptiert bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$.

(ii) $X_0 = \xi$ fast sicher.

(iii) für alle i, j, $t \geq 0$ gilt fast sicher $\int_0^t |b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s)\, ds < \infty$.

(iv) fast sicher gilt (3.1), d.h.

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s.$$

(oder äquivalent (3.2)).

Bemerkung 3.3. Die Bezeichnung 'stark' bezieht sich auf Eigenschaft (i), die besagt, dass die Lösung X_t (im Wesentlichen) eine Funktion von Anfangsbedingung ξ und der Brown'schen Bewegung $(W_s)_{0\leq s\leq t}$ ist. Man kann also W und ξ als einen Input für das dynamische System sehen, welches den Output X liefern. Ein Beispiel für eine starke Lösung einer SDGL haben wir bereits in Beispiel 3.1 mit der linearen SDGL gesehen. Meistens ist diese Abbildung allerdings nicht so explizit.

Definition 3.4. Gegeben $b(t, x)$ und $\sigma(t, x)$ und W eine Brown'sche Bewegung, ξ eine $\mathbb{R}^d$-wertige unabhängige Zufallsvariblen, dann sagen wir dass *starke Eindeutigkeit* (für (b, σ)) gilt, wenn für beliebige starke Lösungen $X, \tilde{X}$ von (3.1) gilt:

$$\mathbb{P}\{X_t = \tilde{X}_t \quad \text{für alle } t \geq 0\} = 1,$$

d.h. also wenn X und $\tilde{X}$ ununterscheidbar sind.

Um eindeutige Lösungen zu erhalten, muss man eine gewisse Regularität der Koeffizienten b und σ fordern. Dies ist sogar der Fall wenn $\sigma = 0$ und man also eine deterministische Differentialgleichung betrachtet. Ist beispielsweise $d = 1, \sigma = 0$ und $b(t, x) = |x|^\alpha$ für $\alpha \in (0, 1)$, dann sind für jedes $s \geq 0$

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [0, s] \\ \left(\frac{t-s}{\beta}\right)^\beta & \text{für } t \geq s, \end{cases}$$

mit $\beta = 1/(1-\alpha)$ eine Lösung von (3.1). Klassischerweise fordert man für Eindeutigkeit Lipschitz Bedingungen in der räumlichen Komponente.

Für eine $d \times m$-Matrix σ schreiben wir

$$\|\sigma\|^2 := \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}^2 = Spur(\sigma\sigma^T).$$

Dies ist die Hilbert-Schmidt Norm, für $m = 1$ entspricht dies der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Satz 3.5. *Seien b und σ Lipschitz-stetig in der zweiten Koordinate. D.h. es gibt $K > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $t \geq 0$ gilt*

$$\|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| + \|b(t,x) - b(t,y)\| \leq K\|x - y\|. \tag{3.4}$$

und

$$\|\sigma(t,x)\|^2 + \|b(t,x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|)^2. \tag{3.5}$$

Weiter gelte für die Anfangsbedingung ξ, dass $\mathbb{E}\|\xi\|^2 < \infty$. Dann gibt es eine eindeutige starke Lösung X der SDGL (3.1).

Die Existenz der Lösung zeigen wir mit einem Picard-Iterationsverfahren. Für die Eindeutigkeit benötigen wir das folgende Lemma von Gronwall.

Lemma 3.6 (Gronwall)**.** *Es seien $L \geq 0$ und $g : [0,T] \to [0,\infty)$ stetig und $h : [0,t] \to \mathbb{R}$ integrierbar bzgl. des Lebesguemaßes auf $[0,T]$, so dass für alle $t \in [0,T]$,*

$$g(t) \leq h(t) + L\int_0^t g(s)\,ds.$$

Dann folgt für alle $t \in [0,T]$

$$g(t) \leq h(t) + L\int_0^t h(s)e^{L(t-s)}\,ds.$$

Beweis. Wir berechnen:

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-Lt}\int_0^t g(s)\,ds\Big) = e^{-Lt}(g(t) - L\int_0^t g(s)\,ds\Big) \leq e^{-Lt}h(t).$$

Daraus folgt, dass

$$\int_0^t g(s)\,ds \leq e^{Lt}\int_0^t e^{-Ls}h(s)\,ds.$$

Damit gilt, wenn wir nochmals die Annahme verwenden,

$$g(t) \leq h(t) + L\int_0^t g(s)\,ds \leq h(t) + L\int_0^t h(s)e^{L(t-s)}\,ds.$$

□

Außerdem benötigen wir noch eine Darstellung des (höher-dimensionalen) euklidischen Norm eines stochastischen Integrals mit Hilfe der Hilbert-Schmidt Norm.

Lemma 3.7. *Für W eine d-dimesionale Brown'sche Bewegung und $h = (h^{ij})$, so dass $h^{ij} \in L_{\mathrm{loc}}(W^j)$ vorhersagbar und $\mathbb{E}[\int_0^T (h_s^{ij})^2\, ds] < \infty$, gilt*

$$\mathbb{E}\Big[\|\int_0^T h_s\, dW_s\|^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^T \|h_s\|^2\, ds\Big].$$

Beweis. Nach Annahme ist $M_t^i = \sum_{j=1}^m \int_0^t h_s^{ij}\, dW_s^k$ für jedes i ein Martingal. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\|\int_0^T h_s\, dW_s\|^2] &= \mathbb{E}\sum_{i=1}^d \Big(\sum_{j=1}^m \int_0^T h_s^{ij}\, dW_s^j\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}\sum_{i=1}^d \sum_{j,k=1}^m \mathbb{E}\langle \int_0^\cdot h_s^{ij}\, dW_s^j, \int_0^\cdot h_s^{ik}\, dW_s^k\rangle_T] \\
&= \mathbb{E}\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \int_0^T (h_s^{ij})^2\, ds = \mathbb{E}\int_0^T \|h_s\|^2\, ds,
\end{aligned}$$

nach der Definition der Hilbert-Schmidt Norm. □

Beweis von Satz 3.5. Wir nehmen zunächst an, dass es Lösungen gibt und zeigen starke Eindeutigkeit und beweisen dann im zweiten Schritt die Existenz.

Eindeutigkeit. Es seien X, Y zwei starke Lösungen von (3.1) bezüglich der gleichen Brown'schen Bewegung und Anfangsbedingung ξ. Dann gilt für $t \le T$:

$$X_t - Y_t = \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dW_s.$$

Mit der Ungleichung $(x+y)^2 \le 2(x^2 + y^2)$ für $x, y \ge 0$ folgt dann

$$\|X_t - Y_t\|^2 \le 2\|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds\|^2 + 2\|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dW_s\|^2.$$

Nun nehmen wir Erwartungswerte und nuzten für den ersten Term Cauchy-Schwarz und für den zweiten Lemma 3.7

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|X_t - Y_t\|^2 &\le 2t \int_0^t \mathbb{E}\big[\|b(s, X_s) - b(s, Y_s)\|^2\big]\, ds + 2\int_0^t \mathbb{E}\big[\|\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\|^2\big]\, ds \\
&\le 2(T+1)K^2 \int_0^t \mathbb{E}\|X_s - Y_s\|^2\, ds.
\end{aligned}$$

Nun nuzten wir das Gronwall'sche Lemma 3.6 mit $g(t) = \mathbb{E}\|X_t - Y_t\|^2$, $h \equiv 0$ und $L = 2(T+1)K^2$ um zu schließen, dass $g(t) = 0$. Damit ist $X_t = Y_t$ fast sicher und somit sind wegen der Stetigkeit X und Y ununterscheidbar.

Existenz. Wir nutzen das Verfahren der Picarditeration. Wir setzten $X_t^{(0)} \equiv \xi$ und definieren dann iterativ für $n \in \mathbb{N}_0$

$$X_t^{(n+1)} := \xi + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\, dW_s, \tag{3.6}$$

Diese Prozesse sind stetig und adaptiert bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$. Wir wollen zeigen, dass die Prozesse $(X_t^{(n)})_{t\geq 0}$ konvergieren und hoffen dann, dass der Grenzwert (3.1) erfüllt. Dazu zeigen wir, dass $(X_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ fast sicher eine Cauchyfolge in $C([0,T], \mathbb{R}^d)$ ist.

Vorab überprüfen wir aber, dass das stochastische Integral in (3.6) wohl-definiert ist. Dazu reicht es (mit der Wachstumsbedingung (3.5)) zu zeigen, dass es für jedes $T > 0$, eine Konstante $C = C(K,T) > 0$ gibt, so dass

$$\mathbb{E}\|X_t^{(n)}\|^2 \leq C(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2)e^{Ct} \quad \text{für alle } t \in [0,T], n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.7}$$

(Übungsaufgabe.)

Nach Definition (3.6),

$$X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} = \int_0^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)}))\, ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)}))\, dW_s =: B_t + M_t.$$

Nach der Abschätzung (3.7) ist M_t ein Martingal, damit gilt mit der Doob'schen L^2-Ungleichung, Satz 1.40, und dann mit Lemma (3.7)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq t} \|M_s\|^2\Big] &\leq 4\mathbb{E}\|M_t\|^2 = 4\,\mathbb{E}\Big[\int_0^t \|\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})\|\, ds\Big] \\
&\leq 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}\|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\|\, ds,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Annahme (3.4) genutzt haben. Für B_t erhalten wir mit Cauchy-Schwarz und dann wieder mit (3.4)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{s\in[0,t]} \|B_s\|^2 &\leq \mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]} s \int_0^s \|b(u, X_u^{(n)}) - b(u, X_u^{(n-1)})\|^2\, du\Big] \\
&\leq K^2 t\, \mathbb{E} \int_0^t \|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\|\, ds.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir also gezeigt, dass mit $L := 2K^2(4+T)$ für $t \in [0,T]$ gilt

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]} \|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\|^2\Big] \leq L \int_0^t \mathbb{E}\|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\|^2\, ds.$$

Durch Iteration erhalten wir mit $C^* = \max_{s\in[0,T]} \mathbb{E}\|X_s^{(1)} - \xi\|^2$ (welches nach (3.7) endlich ist), dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in [0,T]$

$$\mathbb{E} \sup_{s\in[0,t]} \|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\|^2 \leq C^* \frac{(Lt)^n}{n!}.$$

Daraus folgt mit der Chebyshev Ungleichung,

$$\mathbb{P}\Big\{ \sup_{s\in[0,T]} \|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\| > 2^{-n} \Big\} \leq C^* \frac{(4LT)^n}{n!}.$$

Da die Summe über n konvergent ist, gibt uns das Borel-Cantelli Lemma ein Ereinis $\Omega^* \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ und eine Zufallsvariable $N(\omega) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\omega \in \Omega^*$,

$$\sup_{s\in[0,T]} \|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\| \leq 2^{-n} \quad \text{für alle } n \geq N(\omega).$$

Da 2^{-n} summierbar, ist $(X_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ damit eine Cauchyfolge in dem Banachraum $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ (mit Supremumsnorm), d.h. es gibt einen stetigen Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$, so dass fast sicher $\sup_{s\in[0,T]} \|X_s^n - X_s\| \to 0$. Da T beliebig ist, können wir diesen Prozess auf $\mathbb{R}^+$ fortsetzen.

Es bleibt zu überprüfen, dass $(X_t)_{t\geq 0}$ die Gleichung (3.1) erfüllt. Nach Konstruktion konvergiert $X^{(n)}$ lokal gleichmässig gegen X, nach Annahme an die Koefizienten konvergiert auch $b(s, X_s^{(n)})$ und $\sigma(s, X^{(n)})$ fast sicher lokal gleichmäßig gegen $b(s, X_s)$ und $\sigma(s, X_s)$. Mit Lemma 2.26 folgt dann, dass

$$\int_0^t b(s, X_s^{(n)})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\, dW_s \to \int_0^t b(s, X_s\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s,$$

lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit. Wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten, löst also (X_s) die SDGL (3.1). □

Beispiel 3.8. *Lineare SDGL.* Offensichtlich erfüllen die linearen Gleichungen aus Beispiel 3.1 die Voraussetzungen von Satz 3.5. Noch allgemeiner kann man Gleichungen mit Koeffizienten für $x \in \mathbb{R}^d$

$$b(t,x) = A(t)x + a(t), \quad \sigma_{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^d S_{i,j,k}(t)x_k + s_{ij}(t),$$

betrachten, wobei $A, a, S = (S_{i,j,k}), s = (s_{ij})$ messbar und beschränkt in t sind und für festes t sind $A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}, a(t) \in \mathbb{R}^d$, $s(t) \in \mathbb{R}^{d\times m}$ und $S(t) \in \mathbb{R}^{d\times m\times d}$.

Beispiel 3.9. *Kalman-Bucy Filter.* Bei sogenannten Filterproblemen gibt es ein Signal, zum Beispiel die Geschwindigkeit V_t eines atomaren Teilchen, welches man allerdings nicht direkt beobachten kann. Stattdessen kennt man nur eine zufällig gestörte Beobachtung Y_t

des Signals. Das Filterproblem besteht nun darin aus Kenntnis des Prozesses Y_t das Signal V_t möglichst gut zu schätzen. Ein klassischer Modellansatz ist der Kalman-Bucy Filter. Es seien α, β, v_0 Konstanten und W^1 und W^2 unabhängige Brown'sche Bewegungen. Dann nimmt man an, dass das ursprüngliche Signal die Ornstein-Uhlenbeck SDGL

$$dV_t = \alpha V_t \, dt + dW_t^1, \quad V_0 = v_0$$

erfüllt. Die Beobachtung Y_t wird dann beschrieben als

$$dY_t = \beta V_t \, dt + dW_t^2, \quad Y_0 = 0.$$

Wenn man dies in Integralform schreibt als

$$Y_t = \beta \int_0^t V_s \, ds + W_t^2,$$

dann sieht man, dass die Beobachtung von V durch eine unabhängige Störung W^2 beeinflusst wird.

Dies passt in unsere allgemeine Form 3.1, wenn wir $W = (W^1, W^2)$, $d = m = 2$ und

$$b(x,t) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \beta x_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wählen. Gesucht ist dann $X_t = (V_t, Y_t)^T$. Die Koeffizienten erfüllen offensichtlich die Bedingung (3.4) mit $K = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und auch (3.5). D.h. wir wissen, dass es eine eindeutige starke Lösung X_t gibt. Mehr zu der Lösung des eigentlichen Filterproblems finden Sie in [RW00, Ch. VI.9].

Beispiel 3.10. *Brown'sche Brücke* (nach [KS91, Sect. 5.6.B]). Wir betrachten die eindimensionale SDGL

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t} \, dt + dW_t, \quad \text{für } t < T, \quad X_0 = a \tag{3.8}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $T > 0$ und W eine ein-dimensionale Brown'sche Bewegung ist.

Wir behaupten, dass (3.8) eine eindeutige starke Lösung $(X_t)_{t<T}$ hat, die gegeben ist durch

$$X_t = a(1 - \frac{t}{T}) + b\frac{t}{T} + (T - t) \int_0^t \frac{1}{T - s} \, dW_s, \quad t \in [0, T). \tag{3.9}$$

Dass dieses eine starke Lösung ist kann man leicht mit der Itô-Formel nachrechnen. Weierhin folgt die starke Eindeutigkeit aus Satz 3.5. Dazu betrachtet man für $u \in [0, T]$ die Koeffizienten

$$b^u(t,x) = \begin{cases} \frac{b-x}{T-t} & \text{für } t \le u, \\ \frac{b-x}{T-u} & \text{für } t > u, \end{cases} \qquad \sigma \equiv 1.$$

Dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$

$$|b^u(t,x) - b^u(t,y)| \leq \sup_{s \in [0,u]} \frac{1}{T-s}|x-y| = \frac{1}{T-u}|x-y|.$$

und analog gilt auch (3.5). Das heißt nach Satz (3.5) gibt es eine eindeutige starke Lösung $(X_t^u)_{t\geq 0}$. Außerdem gilt für X_t aus (3.9) und $t \leq u$

$$X_t = a + \int_0^t \frac{b - X_s}{T-s} ds + W_t = a + \int_0^t b^u(s, X_s)\, ds + W_t.$$

Damit folgt aus der Eindeutigkeit, dass $X_t = X_t^u$ fast sicher für $t \in [0,u]$. Da $u < T$ beliebig war, gilt also auch starke Eindeutigkeit auf $[0,T)$.

Schließlich setzen wir

$$X_T = b,$$

und nennen den Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ die *Brown'sche Brücke* von a nach b im Zeitintervall $[0,T]$. Wir untersuchen nun einige Eigenschaften dieses Prozesses.

Definition 3.11. Ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess X heißt *Gaußprozess* wenn für alle $k \geq 1$ und $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, der zufällige Vektor $(X_{t_1}^1, X_{t_2}^1, \ldots, X_{t_k}^1, \ldots, X_{t_1}^d, \ldots, X_{t_k}^d)$ eine dk-dimensionale Normalverteilung hat.

Beispiel 3.12. Eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung B ist ein Gaußprozess mit Erwartungswertfunktion $m(t) := \mathbb{E}[B_t] = 0$ und Kovarianzfunktion

$$\rho(s,t) := \mathbb{E}[(B_s - m(s))(B_t - m(t))] = \mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t.$$

Denn wenn $s < t$, dann gilt

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s^2] + \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] = s + \mathbb{E}[B_s \mathbb{E}[B_t - B_s \,|\, \mathcal{F}_s]] = s.$$

Lemma 3.13. *Der Prozess*

$$Y_t = \begin{cases} (T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s}\, dW_s & \textit{für } t \in [0,T) \\ 0 & \textit{für } t = T, \end{cases}$$

ist ein stetiger Gaußprozess mit $\mathbb{E}[Y_t] = 0$ *und Kovarianzfunktion*

$$\rho(s,t) = \mathbb{E}[Y_t Y_s] = (s \wedge t) - \frac{st}{T}, \quad s,t \in [0,T]. \tag{3.10}$$

Beweis. Der Prozess $M_t := \int_0^t \frac{1}{T-s}\, dW_s$ ist ein stetiges Martingal auf $[0,T)$ mit quadratischer Variation

$$\langle M \rangle_t := \int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}\, ds = \frac{1}{T-t} - \frac{1}{T}.$$

Da $\lim_{t\to T}\langle M\rangle_t = \infty$, gibt es nach (einer offensichtlichen Verallgemeinerung) von Satz 2.34 eine Brown'sche Bewegung B, so dass $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$, $t \in [0,T)$. Aus dem Gesetz der großen Zahlen folgt sofort, dass $\lim_{t\to\infty}\frac{B_t}{t} = 0$ fast sicher *(Übungsaufgabe).* Daraus können wir schließen, dass

$$Y_t = \frac{B_{\langle M\rangle_t}}{\langle M\rangle_t + T^{-1}} \to 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Damit ist $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ fast sicher stetig, und, da $\langle M\rangle$ deterministisch, ist Y ein Gaußprozess mit $\mathbb{E}Y_t = 0$. Weiter gilt da $\mathbb{E}B_tB_s = s\wedge t$ für $s,t < T$,

$$\mathbb{E}[Y_sY_t] = (T-t)(T-s)(\frac{1}{T-t\wedge s} - \frac{1}{T}) = (s\wedge t) - \frac{st}{T}.$$

Ist $s\vee t = T$, dann ist $\mathbb{E}[Y_sY_t] = 0$ wie behauptet. □

Korollar 3.14. *Die Brown'sche Brücke* $(X_t)_{t\in[0,T]}$, *definiert in Beispiel* (3.10) *als die eindeutige starke Lösung von* (3.8) *auf* $[0,T)$ *fortgesetzt mit* $X_T = b$, *ist ein stetiger Gaußprozes mit Erwartungswert*

$$\mathbb{E}[X_t] = a(1-\frac{t}{T}) + b\frac{t}{T},$$

und Kovarianz gegeben durch (3.10).

Bemerkung 3.15. Der Name 'Brown'sche Brücke' kommt daher, dass X sich wie ein Brown'sche Bewegung verhält die gezwungen wird zur Zeit T im Punkt b zu landen. Dies kann man mathematisch formulieren: Man kann zeigen, dass für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^k$ und für $0 = t_0 < t_1 < \dots t_k < T$,

$$\mathbb{P}\{(X_{t_1},\dots,X_{t_k}) \in A\} = \mathbb{P}\{(W_{t_1},\dots,W_{t_k}) \in A \,|\, W_T = b\},$$

wobei W eine Brown'sche Bewegung ist. Weiter kann man die entsprechende Dichte explizit ausrechnen. Als dritte Möglichkeit kann man zeigen, dass

$$B'_t := a(1-\frac{t}{T}) + b\frac{t}{T} + (W_t - \frac{t}{T}W_T), t \in [0,T],$$

auch eine Brown'sche Brücke von a nach b in $[0,T]$ ist. ◇

In Dimension 1, d.h. wenn $d = m = 1$ kann man für die Eindeutigkeit die Lipschitz Bedingung an σ erheblich abschwächen.

Satz 3.16 (Yamada-Watanabe)**.** *Es sei* X *die Lösung der SDGL* (3.1) *mit* $d = m = 1$ *und die Koeffizienten* b *und* σ *erfüllen*

$$|b(t,x) - b(t,y)| \le K|x-y|, \tag{3.11}$$

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le h(|x-y|), \tag{3.12}$$

für alle $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $K > 0$ *ist eine Konstante und* $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *ist eine strikt wachsende Funktion mit* $h(0) = 0$ *und*

$$\int_0^\varepsilon h^{-2}(u)\,du = \infty, \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0. \tag{3.13}$$

Dann gilt starke Eindeutigkeit für (3.1)

Bemerkung 3.17. Dieser Satz gilt also insbesondere für $h(u) = u^\alpha$ mit $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Er trifft allerdings keine Aussage für die Existenz einer Lösung, auf diesen Punkt kommen wir später wieder zurück.

Beweis. (nach [KS91]) Idealerweise würden wir gerne die Itô-Formel auf $|\cdot|$ anwenden, diese Funktion ist jedoch nicht differenzierbar in der Null. Die Idee des Beweises ist es mit Hilfe der Bedingung (3.13) eine Approximation in C^2 von $|\cdot|$ zu konstruieren, die genau zu unserem Problem passt.

Wegen der Bedingung an h können wir eine absteigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ finden mit $a_0 = 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so dass $\int_{a_n}^{a_{n-1}} h^{-2}(s)\,ds = n$. Daraus folgt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Funktion ρ_n auf $\mathbb{R}$ mit Träger in (a_{n-1}, a_n) gibt, so dass $0 \leq \rho_n(x) \leq \frac{2}{nh^2(x)}$ für $x > 0$ und $\int_{a_n}^{a_{n-1}} \rho_n(x)\,dx = 1$. Dann ist die Funktion

$$\psi_n(x) = \int_0^{|x|} \int_0^y \rho_n(s)\,ds\,dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

gerade und zweimal stetig differenzierbar mit $|\psi_n'(x)| \leq 1$. Es gilt

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < a_n \\ \int_{a_n}^{|x|} \int_{a_n}^y \rho_n(s)\,ds\,dy & \text{für } |x| \in (a_n, a_{n-1}) \\ \int_{a_n}^{|x|} \int_{a_n}^{a_{n-1}} \rho_n(s)\,ds\,dy + |x| - a_{n-1} & \text{für } |x| > a_{n-1} \end{cases}$$

Da

$$\int_{a_n}^{|x|} \int_{a_n}^y \rho_n(s) \leq \int_{a_n}^{a_{n-1}} \int_{a_n}^{a_{n-1}} \rho_n(s)\,ds\,dy \leq |a_{n-1} - a_n| \to 0,$$

für $|x| \in (a_n, a_{n-1})$, gilt $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) \to |x|$ (gleichmßig in $x \in \mathbb{R}$). Außerdem ist ψ_n wachsend.

Wir nehmen an, dass X und Y starke Lösungnen von (3.1) sind mit $X_0 = Y_0$. O.B.d.A. können wir zusätzlich annehmen, dass

$$\mathbb{E} \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2\,ds + \mathbb{E} \int_0^t |\sigma(s, Y_s|^2 < \infty, \tag{3.14}$$

für alle $t \geq 0$. Falls diese Aussagen nur ohne Erwartungswert fast sicher gelten, können wir die entsprechend gestoppten Prozesse betrachten, die dann diese stärkere Annahme erfüllen.

Nun gilt, dass

$$\Delta_t := X_t - Y_t = \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dW_s.$$

Mit Itô folgt, dass

$$\begin{aligned}\psi_n(\Delta_t) = &\int_0^t \psi_n'(\Delta_s)(b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds + \int_0^t \psi_n'(\Delta_s)(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dW_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \psi_n''(\Delta_s)(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))^2\, ds\end{aligned}$$

Nun gilt nach Annahme (3.14) und Konstruktion von ψ_n, dass

$$\mathbb{E}\Big|\int_0^t \psi_n''(\Delta_s)(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))^2\, ds\Big| \leq \mathbb{E}\int_0^t \rho_n(|\Delta_s|)h(|\Delta_s|)\, ds \leq \frac{2t}{n}.$$

Da $|\psi_n'(x)| \leq 1$ und da wegen Annahme (3.14) das stochastische Integral ein Martingal ist, folgt also zusammen

$$\mathbb{E}\psi_n(\Delta_t) \leq \mathbb{E}\int_0^t \psi_n'(\Delta_s)(b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds + \frac{t}{n} \leq K\int_0^t \mathbb{E}|\Delta_s|\, ds + \frac{t}{n}, \tag{3.15}$$

wobei wir im letzten Schritt Annahme (3.12) genutzt haben. Nun können wir $n \to \infty$ schicken und dann folgt wegen monotoner Konvergenz

$$\mathbb{E}|\Delta_t| \leq K\int_0^t \mathbb{E}|\Delta_s|\, ds,$$

so dass die Eindeutigkeit aus dem Gronwall'schen Lemma 3.6 und der Stetigkeit der Pfade folgt. □

Beispiel 3.18. Satz 3.16 zeigt insbesondere, dass die Gleichung

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha\, dW_s,$$

für $\alpha \geq \frac{1}{2}$ die eindeutige Lösung $X_t \equiv 0$ hat. Für $\alpha < \frac{1}{2}$ kann man zeigen, dass dies nicht die einzige Lösung ist.

Eine sehr ähnliche Technik wie im Beweis von Satz (3.16) erlaubt es auch Lösungen, die z.B. in verschiedenen Anfangspunkten haben, zu vergleichen.

Proposition 3.19. *Es seien $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ starke Lösungen der Gleichungen*

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_i(s, X_s^{(i)})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(i)})\, dW_s, \quad i = 1, 2,$$

bezüglich der selben Brown'schen Bewegung W. Wir nehmen an, dass $\sigma(t,x), b_i(t,x)$ stetige, reellwertige Funktion auf $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ sind, weiter erfülle σ die Bedingung (3.12) mit h wie in Satz 3.16. Schließlich seien

$$X_0^{(1)} \le X_0^{(2)} \text{ fast sicher} \quad b_1(t,x) \le b_2(t,x), \tag{3.16}$$

und entweder b_1 oder b_2 erfülle Bedingung (3.11). Dann gilt fast sicher

$$X_t^{(1)} \le X_t^{(2)} \quad \text{für alle } t \ge 0.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass b_1 die Bedingung (3.11) erfüllt und dass (3.14) gilt. Mit Hilfe der Funktion ψ_n aus dem Beweis von Satz (3.16) definieren wir $\phi_n(x) = \psi_n(x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Analog zu (3.15) erhalten wir für $\Delta_t = X_t^{(1)} - X_t^{(2)}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\phi_n(\Delta_t) - \frac{t}{n} &\le \mathbb{E}\int_0^t \phi_n'(\Delta_s)(b_1(s,X_s^{(1)}) - b_s(s,X_s^{(2)}))\,ds \\
&= \mathbb{E}\int_0^t \phi_n'(\Delta_s)(b_1(s,X_s^{(1)}) - b_1(s,X_s^{(2)}))\,ds \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^t \phi_n'(\Delta_s)(b_1(s,X_s^{(2)}) - b_2(s,X_s^{(2)}))\,ds \le K\int_0^t \mathbb{E}\Delta_s^+,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt (3.11) für b_1 und (3.16) genutzt haben. Mit $n\to\infty$, folgt $\mathbb{E}\Delta_t^+ \le K\int_0^t \mathbb{E}\Delta_s^+\,ds$ und mit dem Gronwall'schen Lemma 3.6 folglich, dass $\mathbb{E}\Delta_t^+ = 0$. D.h. es gilt unter Ausnutztung der Stetigkeit fast sicher $X_t^{(1)} \le X_t^{(2)}$ für alle $t\ge 0$. □

Beispiel 3.20. *Feller Diffusion.* Die SDGL

$$dX_t = \sqrt{|X_t|}\,dW_t \quad X_0 = x,$$

mit $x \ge 0$ ist die sogenannte *Feller Diffusion.* Diese Gleichung beschreibt den Skalierungsgrenzwert eines kritischen Galton-Watson-Prozesses. Gibt es eine starke Lösung, dann können wir aus Proposition 3.19 schließen, dass $X_t \ge 0$ fast sicher. Denn wir wissen aus Beispiel (3.18), dass die Gleichung

$$dX_t^{(1)} = \sqrt{|X_t^{(1)}|}\,dW_t, \quad X_0^{(1)} = 0,$$

die eindeutige Lösung $X_t^{(1)} \equiv 0$ hat. Da $X_0 \ge X_0^{(1)}$ folgt also fast sicher $X_t \ge X_t^{(1)} = 0$ fast sicher.

3.2 Schwache Lösungen

Bei starken Lösung fordert man, dass die Lösung X der SDGL (3.1) adaptiert bezüglich der Filtration die von der Brown'schen Bewegung erzeugt wird. Eine schwächere Art der Lösung von

$$dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t, \tag{3.17}$$

erhält man, wenn man erlaubt, dass die Lösung X und die Brown'sche Bewegung 'gleichzeitig' konstruiert werden.

Definition 3.21. Eine *schwache Lösung* der Gleichung (3.17) mit Startverteilung μ ist ein Tripel (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathbb{F}$, wobei

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, die die üblichen Bedingungen erfüllt.

(ii) $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ist ein $\mathbb{F}$-adaptierter, stetiger $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess und W ist eine m-dimensionale $\mathbb{F}$-Brown'sche Bewegung,

(iii) für alle i, j, $t \geq 0$ gilt fast sicher $\int_0^t |b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s)\, ds < \infty$.

(iv) μ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}^d$ und

$$\mu(A) = \mathbb{P}\{X_0 \in A\} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

(v) Es gilt

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s.$$

Bemerkung 3.22. Im Gegensatz zur starken Lösung muss die Filtration $\mathbb{F}$ nicht die Filtration sein, die von der Brown'schen Bewegung erzeugt wird. D.h. insbesondere dass X nicht unbedingt eine messbare Abbildung von Startbedingung und W ist. Offensichtlich ist eine starke Lösung auch eine schwache Lösung, die Umkehrung ist i.A. falsch, siehe das nächste Beispiel.

Für schwache Lösungen gibt es zwei Konzepte der Eindeutigkeit, wobei das erste sehr nah mit dem Eindeutigkeitskonzept für starke Lösungen verwandt ist.

Definition 3.23. (i) Angenommen $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F}$ und $(X', W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F}'$ sind schwache Lösungen von (3.17) mit derselben Startverteilung μ, wobei W jeweils die selbe Brown'sche Bewegung ist. Wir sagen, dass die Lösung *pfadweise eindeutig* ist, wenn X und X' ununterscheidbar sind.

(ii) Wir sagen, dass die stochastische Differentialgleichung (3.17) *schwach eindeutig* oder *verteilungseindeutig* ist, wenn für zwei Lösungen $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F}$ und $(X', W'), (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}'), \mathbb{F}'$ mit derselben Startverteilung μ gilt, dass X und X' dieselbe Verteilung haben, d.h. also $\mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P}' \circ (X')^{-1}$.

Bemerkung 3.24. Alle Eindeutigkeitsaussagen aus Sektion 3.1 in den Sätzen 3.5 und 3.16 gelten auch für pfadweise Eindeutigkeit, da in den Beweisen nirgends verwendet wird, dass für starke Lösung $\mathbb{F}$ eine besondere Gestalt hat. Genauso kann man auch den Vergleichssatz, Proposition 3.19, nutzen, wenn es schwache Lösungen (X, W) und (X', W)

bezüglich derselben Brown'sche Bewegung W gibt, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind.

Später werden wir sehen, dass pfadweise Eindeutigkeit auch Verteilungseindeutigkeit impliziert, die Umkehrung gilt allerdings nicht. $\diamond$

Beispiel 3.25. (nach Tanaka, wir folgen der Darstellung in [Kle08]) Wir betrachten die SDGL

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t)\, dW_t, \quad X_0 = 0, \tag{3.18}$$

mit W einer ein-dimensionalen Brown'schen Bewegung und

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0, \\ -1 & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Wenn es eine schwache Lösung $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F}$ gibt, dann ist X eine stetiges, lokales Martingal mit quadratischer Variation

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \operatorname{sgn}^2(X_s)\, ds = t.$$

Also ist X eine $\mathbb{F}$-Brown'sche Bewegung. Damit ist diese SDGL verteilungseindeutig. In diesem Fall ist aber auch $(-X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F}$ eine schwache Lösung. Aber da $X \equiv 0$ sicherlich keine Lösung ist, sind X und $-X$ nicht ununterscheidbar und damit gilt nicht die pfadweise Eindeutigkeit.

Um die Existenz einer schwachen Lösung zu zeigen, betrachten wir X eine Brown'sche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathbb{F}$ die von X erzeugte Filtration (mit der üblichen Ergänzung). Wir definieren

$$W_t := \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dX_s.$$

Das gleiche Argument wie oben, zeigt dass W eine Brown'sche Bewegung ist. Schließlich gilt

$$\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dW_s = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)^2\, dX_s = \int_0^t dX_s = X_t.$$

Da $X_0 = 0$, haben wir also eine schwache Lösung (X, W) konstruiert.

Abschließend zeigen wir noch, dass die Gleichung (3.18) keine starke Lösung besitzt. Dazu nehmen wir an, dass (X, W) eine schwache Lösung ist und zeigen, dass X nicht bezüglich $\mathcal{F}_t^W$ (der Filtration die von W erzeugten Filtration) adaptiert ist. Wir wissen, dass X wieder eine Brown'sche Bewegung ist.

Nun betrachten wir, wie im Beweis von Satz 3.16 wieder eine Folge konvexer, gerader Funktion $\psi_n(x) \in C^2(\mathbb{R})$ (z.B. für $h(s) = s$), so dass es eine Folge a_n mit $a_n \downarrow 0$ gibt und $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_n(x) - |x|| \to 0$ und $|\psi_n'(x)| \leq 1$ und $\psi'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ für $|x| \geq a_n$. Dann gilt

$$\int_0^t (\psi_n'(X_s) - \operatorname{sgn}(X_s))^2\, ds \to 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Daraus folgt, dass

$$\int_0^t \psi_n'(X_s)\,dX_s \to \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\,dX_s \quad \text{in } L^2.$$

Also können wir eine Teilfolge (der wir keinen neuen Namen geben) auswählen, so dass diese Konvergenz fast sicher gilt.

Mit Itô folgt nun,

$$\begin{aligned} W_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\,dX_s &= \lim_{n\to\infty} \int_0^t \psi_n'(X_s)\,dX_s \\ &= \lim_{n\to\infty} (\psi_n(X_t) - \psi_n(0) - \frac{1}{2}\int_0^t \psi_n''(X_s)\,ds) \\ &= |X_t| - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^t \psi_n''(|X_s|)\,ds, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt genutzt haben, dass ψ gerade ist. Wir sehen, dass die rechte Seite nur von $|X_s|, s \in [0,t]$ abhängt, so dass W damit $(\mathcal{F}_t^{|X|} := \sigma(|X_s|, s \le t)_{t\ge 0}$ adaptiert ist. Nun ist X eine Brown'sche Bewegung und es gilt $\mathcal{F}^{|X|} \subsetneqq \mathcal{F}^X$ und damit $\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t^{|X|} \subsetneqq \mathcal{F}_t^X$. Damit ist X sicherlich nicht messbar bezüglich der Filtration erzeugt von W_t (und auch nicht wenn wir diese um Nullmengen erweitern). Also, ist X keine starke Lösung. $\diamond$

3.3 Schwache Lösungen via Girsanov

Eine Möglichkeit schwache Lösungen zu erzeugen ist mit Hilfe des Satzes von Girsanov, der aber auch von unabhängigem Interesse ist. Wir behandeln zunächst den Satz und sehen dann am Ende, wieso er auch für stochastische Differentialgleichungen nützlich ist. Wir folgen [KS91], Sect. 3.5.

Wir nehmen an, dass auf einem einem filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, der die üblichen Bedingungen erfüllt und, dass W eine d-dimensionale $\mathbb{F}$-Brown'sche Bewegung ist. Weiter sei $X = (X^1, \dots, X^d)$ ein d-dimesionaler, vorhersagbarer[2] stochastischer Prozess, so dass fast sicher

$$\int_0^T (X_s^i)^2\,ds < \infty \quad \text{für } i = 1, \dots, d.$$

Dann ist $\int_0^t X_s^i\,dW_s^i$ wohl-definiert und in $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^0$. Wie in Beispiel (2.31) ist

$$\mathcal{E}_t^X := \exp\Big\{ \sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^i\,dW_s^i - \frac{1}{2}\int_0^t \|X_s\|^2\,ds \Big\}, \quad t \in [0,T] \tag{3.19}$$

[2] Es würde auch progressiv messbar reichen, siehe Bemerkung 2.15. Für das stochastische Integral bezglich einer Brown'schen Bewegung reicht sogar messbar und adaptiert, damit das Integral wohldefiniert, siehe [KS91, Remark 3.2.11].

ein stetiges, lokales Martingal mit $\mathcal{E}_0^X = 1$. Denn nach Itô gilt

$$\mathcal{E}_t^X = 1 + \sum_{i=1}^d \int_0^t \mathcal{E}_s^X X_s^i \, dW_s^i. \tag{3.20}$$

Unter bestimmten Umständen ist $\mathcal{E}_t^X$ sogar ein Martingal. Wenn das der Fall ist, dann gilt $\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^{X \cdot W}] = 1$ für $t \in [0, T]$. Damit definiert dann

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_T^X,$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{P}}_T$ auf $\mathcal{F}_T$. Zur Erinnerung, dies bedeutet, dass

$$\tilde{\mathbb{P}}_T(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathcal{E}_T^X] \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_T.$$

Satz 3.26 (Girsanov)**.** *Angenommen $\mathcal{E}^X$ definiert in* (3.19) *ist ein Martingal. Definiere*

$$\tilde{W}_t^i := W_t^i - \int_0^t X_s^i \, ds,$$

Für jedes $T > 0$ ist der Prozess $(\tilde{W}_t)_{t \in [0,T]}$ eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}_T)$.

Bemerkung 3.27. In Worten: mit Hilfe von $\mathcal{E}_T^X$ kann man einen Maßwechsel durchführen, so dass unter dem neuen Maß W_t^i die Verteilung einer Brown'schen Bewegung mit *Drift* X_t^i hat.

Ideallerweise würde man gerne ein Maß $\tilde{\mathbb{P}}$ definieren, so dass $\tilde{W}_t^i$ für alle $t \in [0, \infty)$ eine Brown'sche Bewegung ist. Dies geht auch unter etwas stärkeren Bedingungen (unter anderem muß Ω eine bestimmte Form haben), dabei muß sein allerdings etwas vorsichtig sein: wir verweisen auf die Diskussion in [KS91, p. 192].

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\tilde{\mathbb{E}}_T$ den Erwartungswertung unter $\tilde{\mathbb{P}}_T$. Außerdem sei $\mathcal{M}_{0,T}^{\mathrm{loc}}$ die Klasse der stetigen, lokalen Martingale $M = (M_t)_{t \in [0,T]}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ mit $M_0 = 0$ fast sicher und analog wird $\tilde{\mathcal{M}}_{0,T}^{\mathrm{loc}}$ definiert wenn wir $\mathbb{P}$ durch $\tilde{\mathbb{P}}_T$ ersetzen.

Lemma 3.28 (Bayes-Formel)**.** *Es sei $T > 0$ und $\mathcal{E}^X$ sei ein Martingal. Wenn $0 \le s \le t \le T$ und Y ist eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable mit $\tilde{\mathbb{E}}_T|Y| < \infty$, dann gilt*

$$\tilde{\mathbb{E}}_T[Y \mid \mathcal{F}_s] = \frac{1}{\mathcal{E}_s^X} \mathbb{E}[Y \mathcal{E}_t^X \mid \mathcal{F}_s] \quad \mathbb{P}\text{- } \textit{und } \tilde{\mathbb{P}}_T\textit{-fast sicher.}$$

Beweis. *Übungsaufgabe.* □

Proposition 3.29. *Es sei $T > 0$ und $\mathcal{E}^X$ ein Martingal. Wenn $M \in \mathcal{M}_{0,T}^{\mathrm{loc}}$, dann ist der Prozess*

$$\tilde{M}_t := M_t - \sum_{i=1}^{d} \int_0^t X_s^i \, d\langle M, W^i \rangle_s, \quad t \in [0,T],$$

in $\tilde{\mathcal{M}}_{0,T}^{\mathrm{loc}}$. Wenn zusätzlich $N \in \mathcal{M}_{0,T}^{\mathrm{loc}}$ und $\tilde{N}$ analog definiert ist, dann gilt

$$\langle \tilde{M}, \tilde{N} \rangle_t = \langle M, N \rangle_t, \quad t \in [0,T],$$

$\mathbb{P}$- und $\tilde{\mathbb{P}}_T$-fast sicher.

Beweis. Wir können uns auf den Fall beschränken, dass M und N beschränkte Martingale mit beschränkter Variation sind. Außerdem nehmen wir an, dass auch $\mathcal{E}^X$ und $\sum_{i=1}^d \int_0^t (X_s^i)^2 \, ds$ beschränkt in t und ω sind. Der allgemeine Fall folgt dann durch geeignetes Stoppen.

Aus Proposition 2.16 folgt, dass

$$\Big| \int_0^t X_s^i \, d\langle M, W^i \rangle_s \Big|^2 \leq \langle M \rangle_t \int_0^t (X_s^i)^2 \, ds$$

so dass auch $\tilde{M}$ beschränkt ist.

Es gilt nach partieller Integration, Satz 2.22 und nach (3.20)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_t^X \tilde{M}_t &= \int_0^t \mathcal{E}_s^X \, d\tilde{M}_s + \int_0^t \tilde{M}_s^i \, d\mathcal{E}_s^X + \langle \mathcal{E}^X, \tilde{M} \rangle_t \\
&= \int_0^t \mathcal{E}_s^X \, dM_s + \int_0^t \tilde{M}_s^i \, d\mathcal{E}_s^X - \sum_{i=1}^d \int_0^t \mathcal{E}_s^X X_s^i \, d\langle M, W^i \rangle_s + \sum_{i=1}^d \int_0^t \mathcal{E}_s^X X_s^i \, d\langle W_s^i, M \rangle, \\
&= \int_0^t \mathcal{E}_s^X \, dM_s + \int_0^t \tilde{M}_s^i \, d\mathcal{E}_s^X,
\end{aligned}$$

welches ein Martingal unter $\mathbb{P}$ ist. Daraus folgt mit Lemma 3.28, dass

$$\tilde{\mathbb{E}}_T[\tilde{M}_t \,|\, \mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}[\tilde{M}_t \mathcal{E}_t^X \,|\, \mathcal{F}_s]}{\mathcal{E}_s^X} = \tilde{M}_s,$$

so dass $\tilde{M}_s$ ein Martingal unter $\tilde{\mathbb{P}}_T$ ist.

Bei der ersten Rechnung haben wir im vorletzten Schritt genutzt, dass die Differenz von M_t und $\tilde{M}$ von beschränkter Variation ist. Mit dem gleichen Argument für N folgt, dass $\mathbb{P}$-fast sicher $\langle M, N \rangle = \langle \tilde{M}, \tilde{N} \rangle$. Insbesondere gilt, da $\tilde{\mathbb{P}}_T \ll \mathbb{P}$ und M ein Semimartingal unter $\tilde{\mathbb{P}}_T$ ist, dass $\langle M \rangle = \langle \tilde{M} \rangle$ $\tilde{\mathbb{P}}_T$-fast sicher, siehe Bemerkung 1.67. $\square$

Beweis von Satz 3.26. Wir zeigen, dass der Prozess $\tilde{W}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}_T)$ die Voraussetzungen der Levy'schen Charakterisierung, Satz 2.33, erfüllt. Wählen wir $M = W^i$, so ist $\tilde{M} = \tilde{W}^i$ und damit ist $\tilde{W}^i$ in $\mathcal{M}^{\mathrm{loc}}_{0,T}$ nach Proposition 3.29 für alle i und wir müssen nur noch die Kovariationen überprüfen. Mit $N = W^k$ folgt

$$\langle \tilde{W}^i, \tilde{W}^k \rangle_t = \langle W^i, W^k \rangle_t = \delta_{ki} t,$$

so dass $\tilde{W}$ eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung ist. □

In Anwendungen brauchen wir ein einfaches Kriterium um festzustellen können, wann $\mathcal{E}^X$ ein Martingal ist.

Proposition 3.30 (Novikov'sche Bedingung)**.** *Für $M \in \mathcal{M}^{\mathrm{loc}}$ und*

$$Z_t := e^{M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t},$$

folgt aus

$$\mathbb{E}[e^{\frac{1}{2}\langle M \rangle_t}] < \infty, \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

dass $\mathbb{E}[Z_t] = 1$ für alle t und dass Z ein Martingal ist.

Beweis. Mit Hilfe von Optional Stopping und dem Satz von Fatou kann man zeigen, dass Z_t ein Supermartingal ist und deshalb reicht es zu zeigen, dass $\mathbb{E}[Z_t] = 1$ für alle $t \geq 0$, um zu folgern, dass Z ein Martingal ist. (Beide Aussagen sind *Übungsaufgabe.*)

Nach Satz 2.34 gibt es eine Brown'sche Bewegung B (möglicherweise definiert auf einer Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraums), so dass $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$.

Aus Übung 2.4 wissen wir, dass $Y_t := e^{B_t - \frac{1}{2}t}$ ein Martingal ist. Definieren wir also

$$S_n := \inf\{t \geq 0 \,:\, B_t - t \leq -n\},$$

dann ist nach Korollar 1.38 auch $Y^n_t := Y_{t \wedge S_n}$ ein Martingal. Wir zeigen, dass wir Y^n auf $[0, \infty]$ erweitern können. Da $\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0$ gilt $B_t - t = t(\frac{B_t}{t} - 1) \to -\infty$ fast sicher, also ist $S_n < \infty$ fast sicher. Daraus folgt, dass

$$Y^n_\infty = \lim_{t\to\infty} Y^n_t = Y_{S_n} = \exp\{B_{S_n} - \tfrac{1}{2} S_n\}.$$

Insbesondere kann man zeigen, dass dann $\mathbb{E}[Y^n_\infty] = 1$ und schließlich, dass Y^n auf $[0, \infty]$ erweitert werden kann (Details: *Übungsaufgabe.*) Somit können wir den Optional Sampling Satz 1.36 anwenden. Nach Satz 2.34 ist $\langle M \rangle_t$ eine Stoppzeit für die B und deshalb gilt

$$\mathbb{E}[e^{B_{\langle M \rangle_t \wedge S_n} - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t \wedge S_n}] = 1.$$

D.h. es gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n \leq \langle M \rangle_t\}} e^{-n + \frac{1}{2} S_n}] + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n > \langle M \rangle_t\}} e^{M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t}] = 1.$$

Für den ersten Erwartungswert gilt nach Annahme

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n \le \langle M \rangle_t\}} e^{-n + \frac{1}{2} S_n}] \le e^{-n} \mathbb{E}[e^{\frac{1}{2} \langle M \rangle_t}] \to 0,$$

und der zweite Erwartungswert konvergiert wegen monotoner Konvergenz gegen $\mathbb{E}[Z_t]$. Damit ist $\mathbb{E}[Z_t] = 1$ und Z ein Martingal. □

Bemerkung 3.31. Wenn

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\int_0^T \|X_s\|^2\, ds\Big\}\Big] < \infty, \quad \text{für alle } T \in (0, \infty),$$

dann ist $\mathcal{E}^X$ definiert in (3.19) ein Martingal.

Korollar 3.32. *Es sei $T > 0$ und und $(t,x) \mapsto b(t,x)$ messbar von $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ messbar, so dass eine Konstante $K_T > 0$ gibt mit*

$$\|b(t,x)\| \le K_T(1 + \|x\|), \quad \textit{für alle } t \in [0,T].$$

Wenn W eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung ist, dann ist mit $X_t^i := b_i(t, W_t)$ der Prozess

$$\mathcal{E}_t^X := e^{\sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^i\, dW_s^i - \frac{1}{2}\int_0^t \|X_s\|^2\, ds}, \quad t \in [0,T],$$

ein Martingal.

Beweis. Zunächst behaupten wir, dass es genügt zu zeigen, dass es eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gibt mit $t_n \to \infty$, so dass

$$\mathbb{E}[e^{\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|X_s\|^2\, ds}] < \infty,$$

um zu schließen, dass $\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^X] = 1$. Nach Proposition 3.30 und Bemerkung 3.31 ist, wenn $X^n := (X_t^1 \mathbb{1}_{[t_{n-1}, t_n)}(t), \dots, X_t^d \mathbb{1}_{[t_{n-1}, t_n)})$, der Prozess $\mathcal{E}^{X^n}$ ein Martingal. Also gilt

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}_{t_n}^{X^n} \,|\, \mathcal{F}_{t_{n-1}}] = \mathcal{E}_{t_{n-1}}^{X^n} = 1,$$

für alle $n \ge 1$. Daraus folgt,

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}_{t_n}^X] = \mathbb{E}[\mathcal{E}_{t_{n-1}}^X \mathbb{E}[\mathcal{E}_{t_n}^{X^n} \,|\, \mathcal{F}_{t_{n-1}}]] = \mathbb{E}[\mathcal{E}_{t_{n-1}}^X],$$

und damit per Induktion $\mathbb{E}[\mathcal{E}_{t_n}^X] = 1$ für alle $n \ge 1$. Da $\mathcal{E}^X$ ein Supermartingal, ist $\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^X]$ fallend in t. Aus $t_n \to \infty$ folgt, dass $\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^X] = 1$ und somit ist $\mathcal{E}^X$ ein Martingal.

Nun nehmen wir an, dass $X_t^i = b_i(t, W_t)$, dann gilt für $t_{n-1} \le t_n \le T$:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|X_t\|^2 dt \le K_T^2 (t_n - t_{n-1})(1 + \|W_T^*\|)^2,$$

mit $W_T^* := \sup_{s\in[0,T]} \|W_t\|$. Als konvexes Funktional von Martingalen ist $Y_t := \exp\{\frac{1}{4}K_T^2(t_n - t_{n-1})(1+\|W_t\|)^2\}$ ein Submartingal und die Doob'sche Ungleichung besagt, dass

$$\mathbb{E}[e^{\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|X_s\|^2\,ds}] \leq \mathbb{E}[\max_{s\in[0,T]} Y_t^2] \leq 4\mathbb{E}[Y_T^2].$$

Den letzten Erwartungswert kann man direkt ausrechnen und sieht, dass dieser endlich ist genau dann, wenn $t_n - t_{n-1} \leq \frac{1}{TK_T^2}$. Wir können also eine Folge wählen mit $t_n \to \infty$, so dass diese Bedinung erfüllt ist und schließen dann aus dem ersten Teil, dass $(\mathcal{E}_t^X)_{t\in[0,T]}$ ein Martingal ist. □

Wir können den Satz von Girsanov dazu nutzen um schwache Lösungen bestimmter stochastischer Differentialgleichungen zu konstruieren.

Proposition 3.33. *Sei $T > 0$. Wir betrachten die SDGL*

$$dX_t = b(t, X_t)\,dt + dW_t, \quad t \in [0, T], \tag{3.21}$$

wobei W eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung und $b(t,x)$ eine Borel-messbare, $\mathbb{R}^d$-wertige Funktion auf $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ ist, so dass es ein $K > 0$ gibt mmit

$$\|b(t,x)\| \leq K(1 + \|x\|), x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann gibt es für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ eine schwache Lösung von (3.21) mit Startverteilung μ.

Bemerkung 3.34. Insbesondere gilt die Bedingung natürlich, wenn der Vektor $b(t,x)$ beschränkt in (t,x) ist.

Beweis. Es sei X eine Brown'sche Bewegung mit $X_0 = x$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}^x)$. Nach Korollar 3.32 ist mit $Z_t^i := b(t, X_t^i)$ der Prozess

$$\mathcal{E}_t^Z := \exp\Big\{\sum_{i=1}^d \int_0^t b_i(s, X_s)\,dX_s^i - \frac{1}{2}\int_0^t \|b(s,X_s)\|^2\,ds\Big\}.$$

ein Martingal. Damit können wir den Satz von Girsanov 3.26 anwenden und schließen, dass

$$W_t := X_t - X_0 - \int_0^t b(s, X_s)\,ds,$$

unter $\tilde{\mathbb{P}}_T^x$ (definiert als $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T^x}{d\mathbb{P}^x} = \mathcal{E}_T^Z$) auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ eine Brown'sche Bewegung ist. Dies können wir umschreiben als

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + W_t.$$

Daraus sehen wir, dass wenn wir

$$\tilde{\mathbb{P}}^{\mu}_T(A) := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\mathbb{P}}^{x}_T(A)\mu(dx), \quad A \in \mathcal{F}_T,$$

definieren, dass dann $(X_t, W_t)_{t\in[0,T]}$, $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}^{\mu}_T)$, $\mathbb{F}$ eine schwache Lösung von (3.21) darstellen. $\square$

Bemerkung 3.35. Das selbe Verfahren funktioniert auch allgmeiner: Angenommen wir wissen, dass es eine schwache Lösung von (X, W) gibt von

$$dX_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s, \quad t \in [0, T],$$

wobei $\sigma(t, x)$ für jedes t und x eine invertierbare Matrix ist, so dass σ^{-1} beschränkt ist. Dann kann man durch einen geschickten Maßwechsel eine Lösung $(X, \tilde{W})$ der Gleichung

$$dX_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, d\tilde{W}_s,$$

produzieren, vorausgesetzt b erfüllt die Bedingungnen in Proposition 3.33. (Details: *Übungsaufgabe.*) Diese Technik erlaubt einem also den Driftkoeffizienten b zu 'eliminieren'.

Mit Girsanov lässt sich auch die Eindeutigkeit in Verteilung überprüfen.

Proposition 3.36. *Angennommen* $(X^{(i)}, W^{(i)}), (\Omega^{(i)}, \mathcal{F}^{(i)}, \mathbb{P}^{(i)}), \mathbb{F}^{(i)}$ *mit* $i = 1, 2$ *sind schwache Lösungen von* (3.21) *mit derselben Anfangsverteilung* μ. *Wenn*

$$\int_0^T \|b(t, X^{(i)}_t)\|^2\, dt < \infty, \quad \textit{fast sicher},$$

dann haben $(X^{(1)}, W^{(1)})$ *und* $(X^{(2)}, W^{(2)})$ *die gleiche Verteilung (unter den jeweiligen Wahrscheinlichkeitsmaßen).*

Beweis. Für $k \geq 1$, definieren wir

$$\tau^{(i)}_k := T \wedge \inf\Big\{t \geq 0 \,:\, \int_0^t \|b(x, X^{(i)}_s)\|^2\, ds = k\Big\}.$$

Nach der Novikov'schen Bedingung, Prop 3.30, ist

$$\mathcal{E}^{k,i}_t := e^{-\int_0^t \mathbf{1}_{t<\tau^{(i)}_k}(b(s,X^{(i)}_s, dW^{(i)}_s) - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau^{(i)}_k} \|b(s,X^{(i)}_s)\|^2\, ds},$$

ein Martingal. Hier ist $\int_0^t (b_s, dW_s) := \sum_{i=1}^d \int_0^t b^i_s\, dW^i_s$. D.h. wir können Wahrscheinlichkeitsmaße $\tilde{\mathbb{P}}^{(i)}_T$ auf $(\Omega^{(i)}, \mathcal{F}^{(i)}_T)$ definieren via

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}^{(i)}_k}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}^{k,i}_T.$$

Der Satz von Girsanov 3.26 sagt uns, dass der Prozess unter $\tilde{\mathbb{P}}_k^{(i)}$

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{t<\tau_k^{(i)}\}} b(s, X_s^{(i)})\, ds + W_t^{(i)},$$

eine Brown'sche Bewegung ist. Daraus folgt, dass

$$X^{(i)}_{t\wedge\tau_k^{(i)}} = X_0^{(i)} + \int_0^{t\wedge\tau_k^{(i)}} b(s, X_s^{(i)})\, ds + W^{(i)}_{t\wedge\tau_k^{(i)}},$$

ein Bronw'sche Bewegung ist mit Anfangsverteilung μ, die zur Zeit $\tau_k^{(i)}$ gestoppt wurde. Weiterhin bemerken wir, dass

$$\int_0^{t\wedge\tau_k^{(i)}} (b(s, X_s^{(i)}), dW_s^{(i)}) = \int_0^{t\wedge\tau_k^{(i)}} (b(s, X_s^{(i)}), dX_s^{(i)}) - \int_0^{t\wedge\tau_k^{(i)}} \|b(s, X_s^{(i)})\|^2\, ds.$$

Daraus schließen wir, dass $\mathcal{E}_t^{k,i}$, $W^{(i)}$, und $\tau_k^{(i)}$ alle mit Hilfe des Prozesses $X^{(i)}_{t\wedge\tau_k^{(i)}}$ definiert sind (dessen Verteilung unter $\tilde{\mathbb{P}}_k^{(i)}$ wir jetzt kennen). Damit gilt für eine beliebige Partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ and $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d(n+1)}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{(1)}\{(X_{t_0}^{(1)}, W_{t_0}^{(1)}, \ldots, X_{t_n}^{(1)}, W_{t_n}^{(1)}) \in A; \tau_k^{(1)} = T\}\\
&= \int_{\Omega^{(1)}} \frac{1}{\mathcal{E}_T^{1,k}} \mathbb{1}_{\{(X_{t_0}^{(1)}, W_{t_0}^{(1)}), \ldots, X_{t_n}^{(1)}, W_{t_n}^{(1)}) \in A; \tau_k^{(1)} = T\}}\, \tilde{\mathbb{P}}_T^{(1)}\\
&= \int_{\Omega^{(2)}} \frac{1}{\mathcal{E}_T^{2,k}} \mathbb{1}_{\{(X_{t_0}^{(2)}, W_{t_0}^{(2)}), \ldots, X_{t_n}^{(2)}, W_{t_n}^{(2)}) \in A; \tau_k^{(2)} = T\}}\, \tilde{\mathbb{P}}_k^{(2)}\\
&= \mathbb{P}^{(2)}\{(X_{t_0}^{(2)}, W_{t_0}^{(2)}), \ldots, X_{t_n}^{(2)}, W_{t_n}^{(2)}) \in A; \tau_k^{(2)} = T\}
\end{aligned}$$

Schließlich folgt nach Annahme, dass $\mathbb{P}^{(i)}\{\tau_k^{(i)} = T\} \to 1$, so dass die Verteilung von (X^1, W^2) und (X^2, W^2) gleich sind, vgl. Bemerkung 1.4. □

Beispiel 3.37. *Regularisierung durch Rauschen.* Wir betrachten die Gleichung

$$dX_t = b(X_t)\, dt + \sigma dW_t \quad X_0 = 0, \tag{3.22}$$

für W eine Bron'sche Bewegung und mit

$$b(x) := |x|^\alpha \wedge 1,$$

$\sigma \in \mathbb{R}$ und mit $\alpha \in (0, 1)$.

Für $\sigma = 0$ ist diese Gleichung deterministisch und hta unendlich viele Lösungen (als Abwandlung des Beispiels nach Definition 3.4). Denn für jedes $s > 0$ ist

$$x_t = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le s \\ \left(\frac{t-s}{\beta}\right)^\beta & t \in (s, t+\beta) \\ (t - (s+\beta)) + 1 & \text{für } t \ge s + \beta \end{cases}$$

mit $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$ eine Lösung von (3.22) mit $\sigma = 0$.

Für $\sigma \neq 0$ ist diese Gleichung echt stochastisch und da b beschränkt ist, gilt nach Propositionen 3.33 und 3.36, dass es eine schwache Lösung (X, W) von (3.22) gibt, die auch noch verteilungseindeutig ist. Es gibt also nur noch 'eine Lösung' der Gleichung. Dies ist eines von vielen Beispielen bei denen das stochastische Pendant einer (partiellen) Differentialgleichung 'einfacher' zu handhaben ist.

3.4 Schwache Lösungen: Markovprozesse und Martingalprobleme

Für dieses Teilkapitel beziehen wir uns auf [RY99], insbesondere Kapitel VII.2 und IX.1. Wir beschränken uns auf den Fall, dass b und σ nicht von t abhängen. Wir nehmen also an, dass $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ messbare Funktionen sind, die außerdem lokal beschränkt sein sollen.

Wir definieren den Differentialoperator $\mathcal{L}$ für $f \in C^2$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(x) &:= \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\sum_{\ell=1}^m \sigma_{i\ell}(x)\sigma_{j\ell}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\\ &= \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \sigma\sigma^T_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \qquad (3.23)\\ &= \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),\end{aligned}$$

wenn wir $a := \sigma\sigma^T$ definieren. Insbesondere ist für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die Matrix $a(x)$ symmetrisch und positiv semidefinit.

Proposition 3.38. *Sei (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F}$ eine schwache Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t, \qquad (3.24)$$

Für $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ist

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (\mathcal{L}f)(X_s)\,ds$$

ein lokales $\mathbb{F}$-Martingal. Ist $f \in C_K^\infty$[3], dann ist M^f sogar ein $\mathbb{F}$-Martingal.

[3] C_K^∞ ist definiert als die Menge der uendlich oft differenzierbaren Funktion $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, deren Träger kompakt ist

Beweis. Nach Definition gilt

$$dX_t^i = b_i(X_t)\,dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}(X_t)\,dW_t^k,$$

und damit

$$d\langle X^i, X^j\rangle_t = \sum_{k,\ell=1}^m \sigma_{ik}(X_t)\sigma_{j\ell}(X_t)\,d\langle W^k, W\ell\rangle_t = \sum_{k=1}^d \sigma_{ik}\sigma_{jk}(X_t)\,dt = \sigma\sigma_{ij}^T(X_t)\,dt.$$

Nach Itô gilt, dass M^f ein Semimartingal ist und, dass

$$\begin{aligned}
dM_t^f &= \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} f(X_t)\,dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i x_j} f(X_t)\,d\langle X^i, X^j\rangle_t - (\mathcal{L}f)(X_t)\,dt \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \partial_{x_i} f(X_t)\sigma_{ik}\,dW_t^k \\
&\qquad + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} f(X_t) b_i(X_t)\,dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i x_j} f(X_t)\sigma\sigma_{ij}^T(X_t)\,dt - (\mathcal{L}f)(X_t)\,dt \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \partial_{x_i} f(X_t)\sigma_{ik}(x)\,dW_t^k
\end{aligned}$$

Wenn $f \in C_c^\infty$, dann sind $f, \partial_{x_i} f, \partial_{x_i x_j} f$ alle gleich 0 außerhalb einer kompakten Menge K. Andereseits sind b, σ und damit b und a lokal beschränkt, so dass es eine Konstante C_K gibt mit $\|b(x)\| + \|a(x)\| \le C_K$ für alle $x \in K$. Insbesondere ist dann M^f beschränkt auf dem Intervall $[0, t]$ und damit nach Proposition 1.53 ein Martingal. $\square$

Wir definieren $\mathcal{C}^d := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ und für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathcal{C}^d$ bezeichnen wir mit $X : \mathcal{D}^d \to (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} : \omega \mapsto (\omega_t)_{t\ge 0}$ den *kanonischen Prozess.*

Definition 3.39. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathcal{C}^d, \mathcal{B}(\mathcal{C}^d))$ ist eine Lösung des *Martingalproblems* $\mathrm{MP}(x, a, b)$ wenn für den kanonischen Prozess X gilt

- $P\{X_0 = x\} = 1$,
- für jedes $f \in C_K^\infty$ ist der Prozess

  $$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}f(X_s)\,ds,$$

  mit $\mathcal{L}$ wie in (3.23) ein P-Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s, s \le t)$.

Bemerkung 3.40. Wenn $(X,W),(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}),\mathbb{F}$ eine schwache Lösung von (3.24) ist mit Start in $x \in \mathbb{R}$, dann definiert die Verteilung $\mathbb{P}\circ X^{-1}$ von X wegen der Stetigkeit von X eine Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathcal{C}^d$. Nach Proposition 3.38 gilt nun, dass dieses P das Martingalproblem $\mathrm{MP}(x,a,b)$ erfüllt.

Satz 3.41. *Wenn P eine Lösung des Martingalproblems $\mathrm{MP}(x,\sigma\sigma^T,b)$ mit Koordinatenprozess X ist, dann gibt es auf einer Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraums eine Brown'sche Bewegung W, so dass*

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dW_s.$$

Damit ist (X,W) eine schwache Lösung der SDGL mit Koeffizienten (b,σ) mit Start in x.

Lemma 3.42. *Für einen stetigen, adpatierten Prozess X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Für alle $f \in C_K^\infty$ ist M^f ein Martingal.

(ii) Für alle $f \in C^2$ ist M^f ein lokales Martingal.

In diesem Fall gilt, dass $M_t^i := X_t^i - \int_0^t b_i(X_s)\,ds$ für jedes $i \in \{1,\dots,d\}$ ein lokales Martingal ist und

$$\langle M^i, M^j\rangle_t = \int_0^t (\sigma\sigma^T)_{ij}(X_s)\,ds.$$

Beweis. Wir haben bereits in dem Beweis von Proposition 3.38 gesehen wie (i) aus (ii) folgt.

Deshalb nehmen wir nun, dass (i) gilt und wir zeigen (ii).

Zunächst betrachten wir ein $f \in C_K^2$. Dann gibt es eine kompakte Menge K und eine Folge (f_k) in C_K^∞, so dass f_k und auch die ersten und zweiten partiellen Ableitung uniform gegen f und die entsprechenden partiellen Ableitungen konvergieren. Insbesondere ist der Prozess $M^{f_k} - M^f$ auf $[0,t]$ uniform durch eine Konstante $\delta_k = \delta_k(t)$ beschränkt und $\delta_k \to 0$. Nun gilt für $s \le t$, da M^{f_k} ein Martingal ist,

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}[M_t^f \,|\, \mathcal{F}_s] - M_s^f\right| &\le \left|\mathbb{E}[M_t^f \,|\, \mathcal{F}_s] - M_s^{f^k}\right| + \left|M_s^{f_k} - M_s^f\right| \\ &\le \left|\mathbb{E}[M_t^f \,|\, \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[M_t^{f_k}|\mathcal{F}_s]\right| + \left|M_s^{f_k} - M_s^f\right| \\ &\le \mathbb{E}[|M_t^f - M_t^{f_k}|\,|\, \mathcal{F}_s] + \delta_k \le 2\delta_k,\end{aligned}$$

Mit $k\to\infty$ folgt $\delta_k \to 0$, so dass M_t^f ein Martingal ist.

Wenn $f \in C^2$, dann gibt es eine Folge kompakter Mengen $K_n \uparrow \mathbb{R}^d$ und eine Folge $g_n \in C_K^2$, so dass f und g_n auf K_n übereinstimmen. Wenn wir nun die Stoppzeit $\sigma_n :=$

$\inf\{t \geq 0 \,,: \; X_t \notin K_n\}$ betrachten, dann stimmen M^f und M^{g_n} bis zur Zeit σ_n überein, so dass, da M^{g_n} ein Martingal ist, M^f ein lokales Martingal sein muss.

Wenn wir $f(x) = x_i$ betrachten, dann können wir aus (ii) folgern, dass $M^i := X_t^i - X_0^i - \int_0^t b_i(X_s)\,ds = M_t^f$ ein lokales Martingal ist.

Um die Kovarianz zu berechnen, betrachten wir $g(x) = x_k x_\ell$, dann gilt

$$\partial_{x_i} g(x) = x_\ell \mathbb{1}_{\{k=i\}} + x_k \mathbb{1}_{\{\ell=i\}} \quad \text{und} \quad \partial_{x_i x_j} g(x) = \mathbb{1}_{\{j=\ell\}} \mathbb{1}_{\{k=i\}} + \mathbb{1}_{\{j=k\}} \mathbb{1}_{\{i=\ell\}}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}g(x) &= \sum_{i=1}^d b_i(x) \partial_{x_i} g(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^T)_{ij}(x) \partial_{x_i x_j j} g(x) \\
&= b_k(x) x_\ell + b_\ell(x) x_k + \frac{1}{2}((\sigma\sigma^T)_{k\ell} + (\sigma\sigma^T)_{\ell k})(x) = b_k(x) x_\ell + b_\ell(x) x_k + (\sigma\sigma^T)_{k\ell}(x),
\end{aligned}$$

da $\sigma\sigma^T$ symmetrisch ist. Also ist nach (ii), der Prozess

$$M_t^g = X_t^k X_t^\ell - X_0^k X_0^\ell - \int_0^t b_k(X_s) X_s^\ell \,ds - \int_0^t b_\ell(X_s) X_s^k \,ds - \int_0^t (\sigma\sigma^T)_{k\ell}(X_s)\,ds, \quad (3.25)$$

ein lokales Martingal. Wir definieren $I_t^k := \int_0^t b_k(X_s)\,ds$, so dass $M_t^k = X_t^k - X_0^k - I_t^k$ gilt. Damit folgt unter anderem mit partieller Integration (X^k und I^k sind Semimartingale):

$$\begin{aligned}
M_t^k M_t^\ell &= \left(X_t^k - X_0^k - I_t^k\right)\left(X_t^\ell - X_0^\ell - I_t^\ell\right) \\
&= X_t^k X_t^\ell - X_0^k M_t^\ell - X_0^\ell M_t^k - X_0^k X_0^\ell - X_t^k I_t^\ell - X_t^\ell I_t^k + I_t^k I_t^\ell \\
&= X_t^k X_t^\ell - X_0^k X_0^\ell - \int_0^t b_k(X_s) X_s^\ell\,ds - \int_0^t I_s^k\,dX_s^\ell - \int_0^t b_\ell(X_s) X_s^k\,ds - \int_0^t I_s^\ell\,dX_s^k \\
&\quad + I_t^k I_t^\ell - X_0^\ell M_t^k - X_0^k M_t^\ell \\
&= M_t^g + \int_0^t (\sigma\sigma^T)_{k\ell}(X_s)\,ds - \int_0^t I_s^k\,dM_s^\ell - \int_0^t I_s^\ell\,dM_s^\ell - X_0^\ell M_t^k - X_0^k M_t^\ell \\
&\quad - \int_0^t I_s^k\,dI_s^\ell - \int_0^t I_s^\ell\,dI_s^k + I_s^k I_s^\ell,
\end{aligned}$$

Schließlich gilt mit Fubini

$$\begin{aligned}
\int_0^t I_s^k\,dI_s^\ell + \int_0^t I_s^\ell\,dI_s^k &= \int_0^t \int_0^s b_u^k\,du\,b_s^\ell\,ds + \int_0^t \int_0^s b_u^\ell\,du\,b_s^k\,ds \\
&= \int_0^t \int_u^t b_u^k b_s^\ell\,ds\,du + \int_0^t \int_0^u b_s^\ell b_u^k\,ds\,du \\
&= \int_0^t b_u^k\,du \int_0^t b_s^\ell\,ds = I_t^k I_t^\ell.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$M_t^k M_t^\ell - \int_0^t (\sigma\sigma^T)_{k\ell}(X_s)\, ds,$$

ein lokales Martingal in $\mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}$ ist. Nach Satz 1.65 gilt

$$\langle M^k, M^\ell\rangle_t = \int_0^t (\sigma\sigma^T)_{k\ell}(X_s)\, ds,$$

fast sicher. □

Beweis von Satz 3.41. Wir beschränken uns auf den Fall $d = 1$ (um etwas lineare Algebra zu vermeiden) und verweisen auf [KS91] (Thm. VII.2.7, welches auf Thm. V.3.9 basiert) für den vollständigen Beweis. Nach Lemma 3.42 ist der Prozess $M_t := X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s)\, ds$ ein lokales Martingal und

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t \sigma^2(X_s)\, ds.$$

Nun erweitern wir unseren Wahrscheinlichkeitsraum so dass B eine von X unabhängige Brown'sche Bewegung ist. Dann definieren wir das lokale Martingal

$$W_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{\sigma(X_s)>0\}} \frac{1}{\sigma(X_s)}\, dM_s + \int_0^t \mathbb{1}_{\{\sigma(X_s)=0\}}\, dB_s.$$

Nun ist

$$\langle W\rangle_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{\sigma(X_s)>0\}} \sigma_s^{-2}\sigma_s^2\, ds + \int_0^t \mathbb{1}_{\{\sigma(X_s)=0\}} d\, s = t.$$

Also ist W eine Brown'sche Bewegung. Außerdem gilt nun

$$\begin{aligned}\int_0^t \sigma(X_s)\, dW_s &= \int_0^t \mathbb{1}_{\{\sigma(X_s)>0\}} \frac{\sigma(X_s)}{\sigma(X_s)}\, dM_s + \int_0^t \mathbb{1}_{\{\sigma(X_s)=0\}} 0\, dB_s \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{\{\sigma(X_s)>0\}}\, dM_s \\ &= M_t = X_t - \int_0^t b(X_s)\, ds - X_0.\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass (X, W) eine schwache Lösung der SDGL(b, σ) ist. Hierbei haben wir im vorletzten Schritt benutzt, dass

$$\int_0^t (1 - \mathbb{1}_{\{\sigma(X_s)>0\}})^2\, d\langle M\rangle_s = \int_0^t (1 - \mathbb{1}_{\{\sigma(X_s)>0\}})^2 \sigma(X_s)^2\, ds = 0,$$

so dass nach Definition $M_t = \int_0^1 dM_s = \int_0^t \mathbb{1}_{\{\sigma(X_s)>0\}}\, ds$. □

Definition 3.43. Ein *Kern* von $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\Omega', \mathcal{A}')$ ist eine Funktion $P : \Omega \times \mathcal{A}' \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften

(i) $P(\omega, \cdot) : \mathcal{A}' \to [0, \infty]$ ist ein Maß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ für alle $\omega \in \Omega$.

(ii) $P(\cdot, A') : \Omega \to [0, \infty]$ ist $\mathcal{A}$-messbar für jedes $A' \in \mathcal{A}'$.

P heiß *stochastisch* oder auch *Markov'sch*, falls $P(\omega, \Omega') = 1$ für alle $\omega \in \Omega'$ gilt

Definition 3.44. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$ heißt *Markovprozess* mit Verteilungen $(\mathbb{P}_x)_{x \in E}$ auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ falls gilt:

(i) Für jedes $x \in E$ ist X ein stochastischer Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ mit $\mathbb{P}_x\{X_0 = x\} = 1$.

(ii) Die Abbildung $\kappa : E \times \mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{R}^+} \to [0, 1]$, $(x, B) \mapsto \mathbb{P}_x\{X \in B\}$ ist ein stochastischer Kern.

(iii) Es gilt die *(schwache) Markoveigenschaft* Für jedes $A \in \mathcal{B}(E)$, jedes $x \in E$ und $0 \leq s < t$ gilt

$$\mathbb{P}_x\{X_{t+s} \in A \,|\, \sigma(X_u, u \leq s)\} = P_t(X_s, A), \quad \mathbb{P}_x - \text{fast sicher.} \tag{3.26}$$

Dabei ist für $t \geq 0, x \in E$

$$P_t(x, A) := \kappa(x, \{y \in E^{[0,\infty)} \,:\, y(t) \in A\}) = \mathbb{P}_x\{X_t \in A\},$$

definiert als der stochastische Kern $P_t : E \times \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$ der *Übergangswahrscheinlichkeiten* von X zur Zeitdifferenz t .

Bemerkung 3.45. (i) Die Übergangswahrscheinlichkeiten bilden eine Markov'sche Halbgruppe, diese ist definiert als eine Familie von stochastischen Kerne, die die *Chapman-Kolmogorov Gleichung* erfüllen: für alle $A \in \mathcal{E}$

$$P_{t+s}(x, A) = \int P_s(x, dy) P_t(y, A) =: (P_s * P_t)(x, A).$$

Denn wenn $P_t(x, A) := \mathbb{P}_x\{X_t \in A\}$, dann folgt aus der Markoveigenschaft

$$\begin{aligned} P_{t+s}(x, A) &= \mathbb{P}_x\{X_{t+s} \in A\} = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[X_{t+s} \in A \,|\, \sigma(X_u, u \leq s)]] \\ &= \mathbb{E}_x[P_t(X_s, A)] = \int P_t(y, A)\, P_s(x, dy). \end{aligned}$$

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass man gegeben eine Markov'sche Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ von stochastischen Kernen einen Markovprozess konstruieren kann, der (3.26) erfüllt, siehe z.B. [Kle08, Satz 17.8].

(ii) Wir haben hier einen *zeit-homogenen* Markovprozess definiert, d.h. der Übergang von X_s nach X_t hängt nur von der Position X_s und der Zeitdifferenz $t-s$ ab.

Beispiel 3.46. *Brown'sche Bewegung.* Es sei B unter $\mathbb{P}_x$ eine Brown'sche Bewegung gestartet in x. Dann ist $(B, \mathbb{P}_x, x \in \mathbb{R})$ ein Markovprozess. Denn es gilt

$$P_t(x, A) := \mathbb{P}_x\{B_t \in A\} = \mathbb{P}_0\{x + B_t \in A\} = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y+x)^2/(2t)}\, dy =: \int_A p_t(y)\, dy.$$

Man kann die Markoveigenschaft an P_t überprüfen. Dabei nutzt man, dass $B_{t+s} - B_s$ und B_s unabhängige, normalverteilte Größen sind, die Verteilung der Summe also als Faltung gegeben ist.

Satz 3.47. *Wenn es für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ genau eine Lösung P_x für das Martingalproblem $\mathrm{MP}(x, a, b)$ gibt und wenn für jedes $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $t \geq 0$ die Abbildung $x \mapsto P_x\{X_t \in A\}$ messbar ist, dann ist $(X_t, P_x, x \in \mathbb{R}^d)$ ein Markovprozess mit Übergangswahrscheinlichkeiten*

$$\tilde{P}_t(x, A) := P_x\{X_t \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Beweisskizze. Für einen vollständigen Beweise verweisen wir auf Theorem IX.1.9 in [RY99] und wir erklären hier nur die zugrundeliegende Idee.

Für $\tau \geq 0$, betrachten wir den Shift-Operator $\theta_\tau : \mathcal{C}^d \to \mathcal{C}^d$, definiert als

$$\theta_\tau(\omega) := (s \mapsto \omega_{\tau+s}).$$

D.h. wir schneiden den Anteil des Pfades vor τ ab und verschieben den Pfad ω wieder so, dass er in der Null startet.

Wir nehmen an, dass τ eine beschränkte Stoppzeit ist und P_x eine Lösung des Martingalproblems $\mathrm{MP}(x, a, b)$. Wir behaupten, dass unter

$$P_x(\cdot \,|\, \mathcal{F}_\tau), \tag{3.27}$$

der verschoben Prozess $X(\theta_\tau(\omega))$ P_x-fast sicher das Martingalproblem $\mathrm{MP}(X_\tau, a, b)$ löst. Anderseits wissen wir, dass auch P_{X_τ} eine Lösung des Martingalproblems $\mathrm{MP}(X_\tau, a, b)$ ist, also muß gelten

$$P_x(\cdot \,|\, \mathcal{F}_\tau) \circ \theta_\tau^{-1} = P_{X_\tau}(\cdot) \quad P_x\text{-fast sicher.}$$

Wenn wir nun die Mengen $\{y \in \mathcal{C}^d \,:\, y_s \in A\}$ für ein $A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^d)$ und $\tau = t$ einsetzten, dann gilt

$$P_x\{X_{t+s} \in A \,|\, \mathcal{F}_\tau\} = \tilde{P}_s(X_\tau, A).$$

Dies ist die schwache Markoveigenschaft. Die Messbarkeitseigenschaften folgen aus der Messbarkeitsannahme an $\tilde{P}_t$.

Technisches Problem: Die Lösung eines Martingalproblems ist per Definition ein Wahrscheinlichkeitsmaß, die bedingte Erwartung in (3.27) ist dies aber apriori nicht unbedingt. Allerdings kann man zu regulär bedingten Wahrscheinlichkeiten übergeben, um dieses Argument stichfest zu machen.

Ohne in Details zu gehen, kann man aber sehen warum der verschoben Prozess unter der (reg.) bedingten Erwartung $\mathbb{P}(\cdot \,|\, \mathcal{F}_\tau)$ das Martingalproblem erfüllt.

$$\begin{aligned} M_t^f(\theta_\tau(\omega)) &= f(X_{\tau+t}) - f(X_\tau) - \int_0^t \mathcal{L}f(X_{\tau+u})\,du \\ &= f(X_{\tau+t}) - f(X_\tau) - \int_\tau^{\tau+t} \mathcal{L}f(X_u)\,du \\ &= M_{t+\tau}^f(\omega) - M_\tau^f(\omega). \end{aligned} \tag{3.28}$$

In dem Beweis muss man zeigen, dass $M_t^f(\theta_\tau(\omega)$ ein Martingal bezüglich $\mathcal{F}_{\tau+t}$ ist. Wenn aber M_t^f ein Martingal unter P ist, dann ist nach dem Optional-Stopping Satz $M_{t+\tau}^f$ ein Martingal unter $\mathcal{F}_{\tau+t}$. Da M_τ^f $\mathcal{F}_{\tau+t}$ messbar ist zeigt die Rechnung (3.28), dass $M_t^f \circ \theta_\tau$ ein $\mathcal{F}_{\tau+t}$ Martingal ist. □

Bemerkung 3.48. Unter stärkeren Stetigkeitsannahmen an a und b, kann man zeigen, dass die die Lösung der SDGL sogar ein *starker Markovprozess* ist, d.h. die Markoveigenschaft gilt auch für Stoppzeiten τ: für alle $t \geq 0$ gilt

$$\mathbb{P}_x\{X_{\tau+t} \in A \,|\, \mathcal{F}_\tau\} = \tilde{P}_t(X_\tau, A) \quad P_x - \text{fast sicher auf } \{\tau < \infty\},$$

wobei $\tilde{P}_t$ die Übergangswahrscheinlichkeiten bezeichnet. ◇

Wir beschränken uns nun auf den Fall $d = 1$ und zeigen wie man hier einfach mit Hilfe des Martingalproblems schwache Lösungen der Gleichung

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)\,dW_t, \tag{3.29}$$

finden kann.

Wir betrachten zunächst die Situation im entsprechenden Martingalproblem und untersuchen die Auswirkung einer Reskalierung der Koeffizienten.

Proposition 3.49. *Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, so dass es Konstanten $c, C > 0$ gibt und $c \leq \gamma(x) \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Bijektion zwischen Lösungen zu dem Martingalproblem* $\mathrm{MP}(x, \sigma^2, b)$ *und* $\mathrm{MP}(x, \gamma\sigma^2, \gamma b)$.

Beweis. Wir definieren

$$A_t := \int_0^t \frac{1}{\gamma(X_s)}\,ds.$$

Dann ist A nach Annahme an γ ein strikt wachsend und stetige Funktion mit $A(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. D.h. es gibt eine stetige Inverse die wir mit τ_t bezeichnen. Wir betrachten die Transformation $\phi : \mathcal{C}^d \to \mathcal{C}^d$ definiert als

$$\phi(\omega) := (t \mapsto \omega_{\tau_t}).$$

Wenn P ein Lösung des Martingalproblems $\mathrm{MP}(x, a, b)$ ist, dann betrachten wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $P \circ \phi^{-1}$ und zeigen, dass dieses $\mathrm{MP}(x, \gamma a, \gamma b)$ löst. Konkret müssen wir zeigen, dass unter $P \circ \phi^{-1}$ für $f \in C_K^\infty$ der Prozess

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \gamma(X_s)b(X_s)\partial_x f(X_s) + \gamma(X_s)\sigma^2\partial_{xx} f(X_s)\, ds \\ = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \gamma(X_s)\mathcal{L}f(X_s)\, ds, \end{aligned}$$

ein Martingal ist, wobei wir mit

$$\mathcal{L}f(x) = b(x)\partial_x f(x) + \sigma(x)\partial_{xx} f(x),$$

dem Operator für das Martingalproblem $\mathrm{MP}(x, a, b)$ bezeichnen.

Dazu benötigen wir die folgende Formel: für alle messbaren Funktionen g für die die Integrale wohl-definiert sind, gilt

$$\int_0^\infty g(s)\, dA_s = \int_0^\infty g(\tau_s)\, ds, \tag{3.30}$$

wobei dA das Lebesgue-Stieltjes Integral bzgl. A ist. Dies kann man zeigen, in dem man bemerkt, dass für $g(s) = \mathbb{1}_{(a,b]}(s)$ gilt

$$\int_0^\infty g(\tau_s)\, ds = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\tau_s \in (a,b]\}}\, ds = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{s \in (A(a), A(b)]\}}\, ds = A(b) - A(a) = \int_0^\infty g(s)\, dA_s.$$

Die allgemeine Aussage (3.30) erfolgt dann in dem man g durch Elementarfunktion approximiert.

Schließlich gilt für $s < t$, $A \in \mathcal{B}_s$ und $f \in C_K^\infty$ zunächst, dass

$$\begin{aligned} \int_s^t \gamma(X_{\tau_u})\mathcal{L}f(X_{\tau_u})\, du &= \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\tau_u \in [\tau_s, \tau_t]\}}\gamma(X_{\tau_u})\mathcal{L}f(X_{\tau_u})\, du \\ &\overset{(3.30)}{=} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{u \in [\tau_s, \tau_t]\}}\mathcal{L}f(X_u)\gamma(X_u)\frac{1}{\gamma(X_u)}\, du \\ &= \int_{\tau_s}^{\tau_t} \mathcal{L}f(X_u)\, du. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann, dass

$$\begin{aligned}\int_A \left\{ f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t \gamma(X_u)\mathcal{L}(X_u)\,du \right\} dP \circ \phi^{-1} \\ = \int_{\phi^{-1}(A)} \left\{ f(X_{\tau_t}) - f(X_{\tau_s}) - \int_s^t \gamma(X_{\tau_u})\mathcal{L}f(X_{\tau_u})\,du \right\} dP \\ = \int_{\phi^{-1}(A)} \left\{ f(X_{\tau_t}) - f(X_{\tau_s}) - \int_{\tau_s}^{\tau_u} \mathcal{L}f(X_u)\,du \right\} dP\end{aligned}$$

Da $\phi^{-1}(A)$ in $\mathcal{F}_{\tau_s}$ liegt, τ_s ein Stoppzeit ist (ohne Beweis), und da X ein Martingal unter P ist, folgt aus dem Optional-Stopping Satz, dass der obige Ausdruck gerade 0 ist. Damit haben wir gezeigt, dass $P \circ \phi^{-1}$ das Martingalproblem $\mathrm{MP}(x, \gamma a, \gamma b)$ löst.

In dem man γ als Dichte für A verwendet, kann man eine Abbildung ψ definieren, so dass $(P \circ \phi^{-1}) \circ \psi^{-1} = P$ und ϕ bijektiv ist. □

Korollar 3.50. *Wenn $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt ist, so dass $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$ für ein $\varepsilon > 0$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, messbare Funktion, dann gibt es eine schwache Lösung der SDGL mit Koeffizienten b und σ mit Start in x, die verteilungseindeutig ist.*

Beweis. Nach einer Anwendung von Girsanov, analog zur Bemerkung 3.35, reicht es den Fall $b \equiv 0$ zu zeigen. (Die genauen Details, wie man mit dem unendlichen Zeithorizont umgeht, finden Sie in [RY99, Thm. IX. 1.11]).

Wir bemerken, dass das Martingalproblem $\mathrm{MP}(x, 1, 0)$ wird eindeutig durch die Verteilung der Brown'schen Bewegung auf $\mathcal{C}^d$ gelöst (siehe Übungsaufgabe). Nach Proposition 3.49 gibt es also auch eine eindeutige Lösung für $\mathrm{MP}(x, \sigma\sigma^T, 0)$. Schließlich folgt dann aus Satz 3.41, dass es eine schwache Lösung (X, W) der Differentialgleichung

$$dX_t = \sigma(X_t)\,W_t, \quad X_0 = x,$$

gibt. Die Eindeutigkeit in Verteilung folgt aus der Eindeutigkeit des Martingalproblems. □

Bemerkung 3.51. Nach Prop 3.38 erfüllt die soeben konstruierte schwache Lösung mit Start in x das Martingalproblem $\mathrm{MP}(x, a, b)$ und ist damit nach Satz 3.47 ein Markovprozess (dazu muss man noch die Messbarkeitsbedingungen überprüfen). Dies gibt uns also ein Möglichkeit eine große Klasse von Prozessen zu konstruieren, die die Markoveigenschaft erfüllen. In dem Kontext der Markovprozess bezeichnet man diesen Prozess als *Diffusion* und den Operator $\mathcal{L}$ auch als den *Generator* der Diffusion. Der Koeffizient σ wird als Kovarianz- oder Diffusionskoeffizient bezeichnet und b als der Drift.

Allgemeiner ist der Generator definiert in dem man für die Halbgruppe P_t den Ausdruck

$$P_t f(x) := \int f(y)\, P_t(x,\, dy) = \mathbb{E}_x[f(X_t)],$$

für geeignete Abbildung $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ betrachtet und dann ist der Generator definiert als

$$Af(x) := \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f(x) - f(x)).$$

Für die Lösung der SDGL(σ, b) kann man dann zeigen, dass (in einem geeigneten) Sinn $A = \mathcal{L}$. Beispielsweise ist der Generator für eine Brown'sche Bewegung (da $b = 0, \sigma = 1$), der Laplace Operator Δ.

Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen stochastischen Differentialgleichung und partiellen Differentialgleichung. Als eines von vielen Beispielen betrachten wir die folgende Proposition. Bei der Formulierung benötigen wir die Räume

$$C_0^\infty = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \,:\, | \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0\}.$$

und für $E \subset \mathbb{R}^n$

$$C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R}^d) := \{(t,x) \mapsto u(t,x) \,: u_t(\cdot, x) \in C^1((0,\infty) \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}^d \\ \text{und } u(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^d) \text{ für jedes } t \geq 0\}.$$

Proposition 3.52. *Wir nehmen an, dass für jedes $f \in C_0^\infty$ das* Cauchyproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = \mathcal{L}u \quad \textit{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) & = f(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

eine Lösung $u_f \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^d) \cap C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ hat, die auf jeder Menge der Form $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, $T > 0$, beschränkt ist. Wenn P_x ein Lösung von MP(x,a,b) *ist, dann gilt für alle $t \geq 0$*

$$u_f(t,x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)].$$

Sind P_x und P'_x beliebige Lösung von MP(x,a,b)*, dann gilt*

$$P_x\{X_t \in A\} = P'_x\{X_t \in A\} \quad \textit{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Bemerkung 3.53. Wir haben also gezeigt, dass aus Existenz der Lösung des Cauchyproblems Eindeutigkeit der *ein-dimensionalen* Verteilung, also der Verteilung von X_t für festes $t \geq 0$, im Martingalproblem folgt. Mit etwas mehr Arbeit, siehe [KS91, Thm. 4.28] kann man zeigen, dass es unter den Voraussetzungen der Proposition 3.52 höchstens eine Lösung des Martingalproblems gibt.

Beweis. Wir folgen [KS91, Lemma 4.26] Gegeben eine Lösung u_f des Cauchyproblems, definieren wir die Funktion $g : [0,T]\times, \mathbb{R}^d$ als

$$g(t,x) := u_f(T-t,x),$$

Diese erfüllt dann $g \in C([0,T] \times \mathbb{R}^d) \cap C^{1,2}((0,T) \times \mathbb{R}^d)$ und

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} + \mathcal{L}g &= 0 \quad \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ g(T,x) &= f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Wenn für $x \in \mathbb{R}^d$, P_x eine Lösung von $\mathrm{MP}(x,a,b)$ ist, dann wissen wir aus Proposition 3.41, dass wir (auf eine Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraums) eine schwache Lösung (X,W) der $\mathrm{SDGL}(b,\sigma)$ konstruieren können. Insbesondere können wir Itô für das d-dimensionale Semimartingal (t,X_t) anwenden und bekommen so für $t \leq T$

$$\begin{aligned} dg(t,X_t) &= \partial_t g(t,X_t)\,dt + \sum_{i=1}^t \partial_{x_i} g(t,X_t)\,dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial_{x_i x_j} g(t,X_t)\,d\langle X^i, X^j\rangle_t \\ &= \sum_{i=1}^t \partial_{x_i} g(t,X_t)\,dW_t^i + \underbrace{(\partial_t g + \mathcal{L}g)(t,X_t)}_{=0}\,dt \\ &= \sum_{i=1}^t \partial_{x_i} g(t,X_t)\,dW_t^i. \end{aligned}$$

analog zur Rechnung in Proposition 3.38. Damit ist $g(t,X_t)$ ein lokales Martingal und da g nach Annahme beschränkt ist, folgt dass $g(t,X_t)$ sogar ein Martingal ist. Insbesondere gilt

$$u_f(T,x) = g(0,X_0) = \mathbb{E}_x[g(T,X_T)] = \mathbb{E}_x[u_f(0,X_T)] = \mathbb{E}_x[f(X_T)].$$

Ist P'_x nun eine weitere Lösung von $\mathrm{MP}(x,a,b)$, dann gilt für alle $f \in C_0^\infty$:

$$\mathbb{E}_x[f(X_t)] = \mathbb{E}'_x[f(X_t)]. \tag{3.31}$$

Schließlich betrachten wir die Menge $A = \prod_{i=1}^d [a_i,b_i]$ für $a_i \leq b_i$. Dann kann man $\mathbb{1}_A$ monoton durch Funktionen f_n in C_0^∞ approximieren und erhält dann also aus (3.31)

$$P'_x\{X_t \in A\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[f_n(X_t)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}'_x[f_n(X_t)] = P_x\{X_t \in A\},$$

Da Mengen dieser Form einen schnitt-stabilen Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ bilden, gilt die Aussage der Proposition. □

Zum Abschuß der Vorlesung wollen wir noch ein Resultat festhalten, welches den Zusammenhang zwischen starken und schwachen Lösung herstellt.

Satz 3.54. *Angenommen* (3.17) *hat eine schwache Lösung und es gilt pfadweise Eindeutigkeit, dann hat* (3.17) *eine eindeutige starke Lösung.*

Bemerkung 3.55. Für einen Beweis verweisen wir auf [KS91, Cor. 5.3.23] oder [RY99, Thm. IX.1.7]. Als Teil des Beweis zeigt man auch, dass für schwache Lösungen pfadweise Eindeutigkeit die Eindeutigkeit in Verteilung impliziert.

Eine wichtige Anwendung des Satzes ist der ein-dimensionale Fall. Als Beispiel betrachten wir die sogenannte *Wright-Fisher Diffusion* mit Selektion, die Anwendung in der Evolutionsbiologie findet:

$$dX_t = sX_t(1-X_t)\,dt + \mathbb{1}_{\{X_t\in[0,1]\}}\sqrt{X_t(1-X_t)}\,dW_t,$$

für $s\in\mathbb{R}$ einen Parameter. Wir haben in Korollar 3.50 gezeigt, dass die Gleichung eine schwache Lösung hat. Weiter wissen wir aus Satz 3.16, dass für diese Gleichung pfadweise Eindeutigkeit gilt (siehe auch Bemerkung 3.24). D.h. wir könne aus Satz 3.54 schließen, dass es eine starke Lösung gibt. Der Generator dieser Diffusion ist nach Bemerkung 3.51 gegeben durch

$$\mathcal{L} = s(1-x)x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}(1-x)x\frac{d^2}{dx^2}.$$

Mit dem gleichen Argument klärt man auch die Existenzfrage einer starken Lösung in Beispiel 3.20.

Anhang A

Anhang

Der Satz über monotone Klassen ist ein klassisches Resultat aus der Maßtheorie. Dazu betrachtet man einen Raum V, der alle reelwertigen Funktionen enthält, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllten. Unter bestimmten Bedingungen braucht man diese Bedingungen nur für eine kleine Klasse K überprüfen, um schließen zu können, dass diese für alle bezüglich $\sigma(K)$ messbare Funktionen gilt. Für einen Beweis siehe [Sch13], Appendix Satz 5.1.

Satz A.1 (Satz über monotone Klassen)**.** *Es sei K eine multiplikative Familie von beschränkten reellwertigen Funktionen auf einer nicht-leeren Menge Ω, d.h. also wenn $f, g \in K$ dann ist auch $fg \in K$. Weiter sei $\mathcal{G} = \sigma(K)$. Wenn V ein linearer Raum von reellwertigen Funktion ist, der die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

(i) $\mathbb{1} \in V$,

(ii) $(f_n) \subset V$, $f_n \geq 0$, $f_n \uparrow f$ *und* f *ist beschränkt, dann ist* $f \in V$,

(iii) $K \subset V$,

dann enthält V alle beschränkten, $\mathcal{G}$-messbaren Funktionen auf Ω.

Index

Überquerungszeiten, 24

adaptiert, 12

Brown'sche Bewegung, 18
Brown'sche Brücke, 64

càdlàg, 19

Diffusion, 89
Doob'sche Ungleichung, 23
Drift, 89

Eindeutigkeit
    pfadweise, 70
    schwach, 70
Eintrittszeit, 14
Elementarprozess, 41
Exponentielles Martingal, 53

Filtration, 12
    filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, 12
    rechtsstetig, 13

Gaußprozess, 65
Generator, 89
geometrische Brown'sche Bewegung, 58
gleichgradig integrierbar, 26

harmonisch, 53

Integral
    Lebesgue-Stieltjes, 39

Kunita-Watanabe Ungleichung, 45

Lebesgue-Stieltjes Integral, 39

Martingal, 18
    Submartingal, Supermartingal, 18
    Exponentielles, 53
    lokales, 28
Maximalungleichung, 23
Modifikation, 10

Ornstein-Uhlenbeck Prozess, 58

Poissonprozess, 19

quadratische Variation, 30

schwach eindeutig, 70
Semimartingal, 29
stochastischer Prozess, Zustandsraum, 9
stochastisches Integral
    Semimartingal, 46
Stoppzeit, 13
    schwach, 13

Ungleichung
    Doob, 23
    Kunita-Watanabe, 45
ununterscheidbar, 10

Variation
    quadratisch, 30
verteilungseindeutig, 70

Wright-Fisher Diffusion, 92

Literaturverzeichnis

[Als07] G. Alsmeyer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30, WWU Münster, 5. auflage edition, 2007.

[Dur96] R. Durrett. *Stochastic calculus*. Probability and Stochastics Series. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996. A practical introduction.

[FH14] P. Friz and M. Hairer. *A Course on Rough Paths*. Springer, 2014.

[Gär08] J. Gärtner. *Mass- und Integrationstheorie*. 2008. Vorlesungsskript (online erhältlich), TU Berlin.

[Kal02] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.

[Kle08] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin: Springer, 2nd revised ed. edition, 2008.

[KS91] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[Mey66] P.-A. Meyer. *Probability and potentials*. Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1966.

[MP10] P. Mörters and Y. Peres. *Brownian motion*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2010.

[Ren13] M. von Renesse. *Stochastische Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript Universität Leipzig, 2013.

[RW00] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and martingales*, volume 2. Cambridge University Press, 2000.

[RY99] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

[Sch13] M. Scheutzow. *Stochastic Processes II/ Wahrscheinlichkeitstheorie III*. Vorlesungsskript TU Berlin, 2013.