Institut für
Mathematische Statistik

Ortgiese/Schubert
WS 2014/2015

Übungsaufgaben zur Stochastischen Analysis

Aufgabe Sei $B_t = (B_t^1, B_t^2, B_t^3)$ eine 3-dim Brown'sche Bewegung. Sei

$$X := \prod_i \operatorname{sgn} B_1^i, \quad M^1 = B^1, \quad M^2 = B^2, \quad M^3 = XB^3.$$

Zu zeigen:

(a) (M^1, M^3) ist BB

(b) (M^1, M^2, M^3) ist keine BB

Lösung:

Erinnerung: Für σ-Algebren $\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3$ mit $\sigma(\mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2)(=: \mathcal{A}^1 \vee \mathcal{A}^2)$ unabhängig von $\mathcal{A}^3$ gilt

$$\mathbb{P}(A \,|\, \mathcal{A}^2) = \mathbb{P}(A \,|\, \mathcal{A}^2 \vee \mathcal{A}^3) \quad \textit{für alle } A \in \mathcal{A}^1. \tag{1}$$

zu (a) Wir zeigen zunächst, dass M^1 und M^3 Martingale bezüglich *derselben* Filtration $\mathcal{F}_t$ sind, wobei hier

$$\mathcal{F}_t := \sigma(B_s^1, B_s^3, s \le t, X).$$

Sei $s < t$. Wir zeigen zunächst

$$\mathbb{E}(M_t^1 - M_s^1 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t^1 - B_s^1 | \mathcal{F}_s) = 0.$$

Um (1) anwenden zu können, betrachten wir

$$\mathcal{A}_{s,t}^1 = \sigma(B_u^1 - B_s^1, B_u^3 - B_s^3, u \le t), \qquad \mathcal{A}_t^2 = \sigma(B_r^1, B_r^3, r \le t) =: \mathcal{F}_t^{1,3}$$

$$\mathcal{A}_t^3 = \begin{cases} X, & t < 1 \\ \sigma(\operatorname{sgn} B_1^2), & t \ge 1 \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{A}_s^2 \vee \mathcal{A}_s^3 = \mathcal{F}_s$.

<u>Beh 1:</u> $\mathcal{A}_{s,t}^1 \vee \mathcal{A}_t^2 = \mathcal{F}_t^{1,3}$ ist unabhängig von $\mathcal{A}_t^3$.

<u>Beweis Beh. 1:</u> Für $t \ge 1$ ist die Aussage klar, da B^1, B^2, B^3 unabhängig sind.

Sei $t < 1$ und $A \in \mathcal{F}_t^{1,3}$. Setze $X^i := \operatorname{sgn} B_1^i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cap \{X = 1\}) \\
=&\mathbb{P}(A \cap \{X^1X^3 = 1\} \cap \{X^2 = 1\}) + \mathbb{P}(A \cap \{X^1X^3 = -1\} \cap \{X^2 = -1\}) \\
=&\mathbb{P}(A \cap \{X^1X^3 = 1\})\mathbb{P}(\{X^2 = 1\}) + \mathbb{P}(A \cap \{X^1X^3 = -1\})\mathbb{P}(\{X^2 = -1\}) \\
=&\mathbb{P}(A \cap \{X^1X^3 = 1\})\frac{1}{2} + \mathbb{P}(A \cap \{X^1X^3 = -1\})\frac{1}{2} \\
=&\frac{1}{2}\mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

Die analoge Aussage mit $\{X = -1\}$ zeigt Beh. 1.

Da $B_t^1 - B_s^1$ messbar bzgl. $\mathcal{A}_{s,t}^1$ ist, sind mit Beh. 1 die Voraussetzungen für (1) erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t^1 - B_s^1 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t^1 - B_s^1 | A_s^2 \vee \mathcal{A}_s^3) \\
&\overset{(1)}{=} \mathbb{E}(B_t^1 - B_s^1 | \mathcal{F}_s^{1,3})
\end{aligned}$$

Weiter gilt unter erneuter Verwendung von (1) ($\mathcal{F}_t^1 := \sigma(B_s^1, s \le t)$)

$$\mathbb{E}(B_t^1 - B_s^1 | \mathcal{F}_s^{1,3}) = \mathbb{E}(B_t^1 - B_s^1 | \mathcal{F}_s^1) = 0. \tag{2}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da B^1 Brown'sche Bewegung bzgl. $\mathcal{F}_t^1$ ist. Damit ist $M^1 = B^1$ ein Martingal bzgl $\mathcal{F}_t$.

Analog gilt für M^3 (beachte: X ist F_s messbar und $B_t^3 - B_s^3$ ist messbar bzgl. $\mathcal{A}_{s,t}^1$)

$$\mathbb{E}(M_t^3 - M_s^3 | \mathcal{F}_s) = X\mathbb{E}(B_t^3 - B_s^3 | \mathcal{F}_s) = 0.$$

Damit sind M^1 und M^3 Martingale bzgl. $\mathcal{F}_t$.

Es bleibt zu zeigen: $\langle M^1 \rangle_t = \langle M^3 \rangle_t = t$ und $\langle M^1, M^3 \rangle_t = 0$. Mit analogen Argumenten wie oben ($\mathcal{A}_{s,t}^1$ anpassen) sind $(M_t^1)^2 - t, (M_t^3)^2 - t$, $(M^1M^3)_t$ jeweils $\mathcal{F}_t$-Martingale, womit die Behauptung folgt.

zu (b) Wir zeigen, dass die Komponenten von (M_1^1, M_1^2, M_1^3) nicht unabhängig sind. Es gilt $\mathbb{E}(|B_1^i|) > 0$, denn $\mathbb{E}(B_1^i) = 0$ und $\mathbb{V}B_1^i = 1$. Also folgt

$$\mathbb{E}(M_1^1M_1^2M_1^3) = \mathbb{E}(|B_1^1|\ |B_1^2|\ |B_1^3|) = \mathbb{E}(|B_1^1|)\ \mathbb{E}(|B_1^2|)\ \mathbb{E}(|B_1^3|) > 0$$

Da aber $\mathbb{E}(M_1^1) = 0$ ist

$$0 = \mathbb{E}(M_1^1)\mathbb{E}(M_1^2)\mathbb{E}(M_1^3),$$

womit für $t = 1$ die Unabhängigkeit verletzt ist.