Institut für
Mathematische Statistik

Ortgiese/Schubert
WS 2014/2015

Lösung zu Aufgabe 3 (ii) Blatt 2 zur Stochastischen Analysis

Aufgabe Sei B eine standard Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie: Der Prozess X mit

$$X_0 := 0, \quad X_t := tB_{\frac{1}{t}} \qquad \text{für } t > 0$$

ist eine Brown'sche Bewegung.

Lösung: Wir müssen zeigen

(i) $X_0 = 0$ fast sicher (✓)

(ii) Für alle $0 \leq s \leq t$ ist $X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s = \sigma(X_r, r \leq s)$

(iii) Für alle $0 \leq s \leq t$ ist $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

(iv) X hat (fast sicher) stetige Pfade

zu (ii): Sei $0 \leq u \leq s \leq t$ (also $0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{s} \leq \frac{1}{u}$).

Da B Brown'sche Bewegung ist, folgt aus der Unabhängigkeit der Inkremente (Eigenschaft (ii) für B), dass der Vektor

$$(B_{\frac{1}{u}} - B_{\frac{1}{s}}, B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}}, B_{\frac{1}{t}})$$

aus unabhängigen normalverteilten Komponenten besteht und damit 3-dim normalverteilt ist. Damit sind auch die durch Linearkombinationen erhaltenen Vektoren

$$(B_{\frac{1}{u}}, B_{\frac{1}{s}}, B_{\frac{1}{t}}) \quad \text{und} \quad (X_u, X_s, X_t)$$

jeweils 3-dim normalverteilt bzw. $(X_t - X_s, X_u)$ ist 2-dim normalverteilt. Damit ist $X_t - X_s$ genau dann unabhängig von X_u, wenn $X_t - X_s$ und X_u unkorreliert sind, also wenn $\mathbb{E}[(X_t - X_s)X_u] = 0$.
Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t - X_s)X_u] &= \mathbb{E}[(tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}})uB_{\frac{1}{u}}] \\
&= \mathbb{E}[(tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}})(uB_{\frac{1}{u}} - uB_{\frac{1}{s}} + uB_{\frac{1}{s}})] \\
&= \mathbb{E}[(tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}})(uB_{\frac{1}{u}} - uB_{\frac{1}{s}})] + \mathbb{E}[(tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}})uB_{\frac{1}{s}}]. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Es gilt für den zweiten Term

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}})uB_{\frac{1}{s}}] &= tu\mathbb{E}[B_{\frac{1}{t}}B_{\frac{1}{s}}] - su\mathbb{E}[B^2_{\frac{1}{s}}] \\
&= tu\mathbb{E}[B_{\frac{1}{t}}B_{\frac{1}{s}}] - u \\
&= tu \underbrace{\mathbb{E}[B_{\frac{1}{t}}(B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}})]}_{=0 \text{ wg. Unabh. und } \mathbb{E}(B_{1/t})=0} + tu\mathbb{E}[B^2_{\frac{1}{t}}] - u = 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Für den ersten Term in (1) (bis auf einen Faktor u) gilt mit $\mathcal{G}_s = \sigma(B_r, r \leq s)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}})(B_{\frac{1}{u}} - B_{\frac{1}{s}})] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[(tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}})(B_{\frac{1}{u}} - B_{\frac{1}{s}})|\mathcal{G}_{\frac{1}{s}}]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}})\mathbb{E}[(B_{\frac{1}{u}} - B_{\frac{1}{s}})|\mathcal{G}_{\frac{1}{s}}]\right] \qquad (3) \\
&= \mathbb{E}\left[(tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}})\underbrace{\mathbb{E}[(B_{\frac{1}{u}} - B_{\frac{1}{s}})]}_{=0}\right] \qquad (4) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hierbei folgt (3), da sowohl $B_{\frac{1}{t}}$ als auch $B_{\frac{1}{s}}$ $\mathcal{G}_{\frac{1}{s}}$-messbar sind (wg. $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{s}$). Weiter folgt (4), da $(B_{\frac{1}{u}} - B_{\frac{1}{s}})$ unabhängig von $\mathcal{G}_{\frac{1}{s}}$ ist. Einsetzen liefert dann

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)X_u] = 0,$$

womit (ii) bewiesen ist.

<u>zu (iii)</u>: Es gilt für $0 \leq s \leq t$ (also $0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{s}$)

$$\begin{aligned}
X_t - X_s &= tB_{1/t} - sB_{1/s} \\
&= tB_{1/t} - sB_{1/t} + sB_{1/t} - sB_{1/s} \\
&= (t-s)B_{1/t} + s(B_{1/t} - B_{1/s}) \\
&= \underbrace{(t-s)B_{1/t}}_{\sim\mathcal{N}(0,\frac{(t-s)^2}{t})} - \underbrace{s(B_{1/s} - B_{1/t})}_{\sim\mathcal{N}(0,s^2(\frac{1}{s}-\frac{1}{t}))}
\end{aligned}$$

und die beiden Normalverteilungen sind unabhängig, da B Brown'sche Bewegung. Wegen $\frac{1}{s} - \frac{1}{t} = \frac{t-s}{st}$ ist

$$\frac{(t-s)^2}{t} + s^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right) = \frac{t^2 - 2ts + s^2}{t} + \frac{s^2(t-s)}{st} = \frac{st^2 - 2ts^2 + s^3 - s^3 + s^2t}{st} = t - s,$$

also

$$X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s).$$

zu (iv): Für $t > 0$ folgt die Stetigkeit aus der Stetigkeit von B, womit die Stetigkeit in $t = 0$ zu zeigen bleibt.

Analog zur Überlegung in (ii) sehen wir, dass für alle endlich dimensionalen Vektoren gilt

$$(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \text{ ist } n\text{-dim. normalverteilt,}$$

charakterisiert durch

$$\mathbb{E}(t_i) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(t_i, t_j) = \mathbb{E}(t_i t_j) = t_i \quad \text{für } i \leq j$$

(siehe Rechnung zu (2)). Außerdem ist auch

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \quad n\text{-dim. normalverteilt (siehe oben)}$$

mit

$$\mathbb{E}(X_i) = i\mathbb{E}[B_{1/i}] = 0, \quad \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = ij\mathrm{Cov}(B_{\frac{1}{i}}, B_{\frac{1}{j}}) = \frac{ij}{j} = i \quad \text{für } i \leq j.$$

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist also

$$\{X_t, t \in \mathbb{Q}, t \geq 0\} \quad \text{verteilt wie} \quad \{B_t, t \in \mathbb{Q}, t \geq 0\}.$$

Da wegen der Stetigkeit von B_t gilt

$$\lim_{t \to 0, t > 0, t \in \mathbb{Q}} B_t(\omega) = 0 \quad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

folgt auch

$$\lim_{t \to 0, t > 0, t \in \mathbb{Q}} X_t = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Da $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ dicht in $(0, \infty)$ liegt und X_t stetig ist für $t > 0$, gilt

$$0 = \lim_{t \to 0, t > 0, t \in \mathbb{Q}} X_t = \lim_{t \to 0, t > 0} X_t = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Dies beweist (iv).