Institut für
Mathematische Statistik

Ortgiese/Schubert
WS 2014/2015

Übungsaufgaben zur Stochastischen Analysis

Blatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Geben Sie ein stetiges Semimartingal (mit nicht-trivialem Martingalanteil) an, so dass $X_t^2 - \langle X \rangle_t$ kein Martingal ist.

Aufgabe 2 Das (deterministische) Lebesgue-Stieltjes Integral (4 Punkte)

(a) Finden Sie das Maß μ, welches zu der verschobenen Heaviside-Funktion

$$g_t = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 1 \\ 1 & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

gehört. Berechnen Sie $\int_0^t f_s dg_s$ für $f_s = e^{s+2}$.

(b) Zeigen Sie: Wenn $g \in C^1$, dann ist g von (lokal) beschränkter Variation und es gilt

$$\int_0^t f_s \, dg_s = \int_0^t f_s g_s' \, ds.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie für $A \in \mathcal{A}$ und X, Y linksstetige, adaptierte, lokal beschränkte stochastische Prozesse:

1. $X \cdot A$ ist bilinear in A und X.
2. $(X \cdot A)^T = X \cdot A^T$ für alle Stoppzeiten T.
3. $Y \cdot (X \cdot A) = (YX) \cdot A$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $M \in \mathcal{H}^0$, $f \in \mathcal{L}_e$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\langle f \cdot M \rangle_t = \int_0^t f_s^2 \, d\langle M \rangle_s.$$

(b) Schliessen Sie aus (a), dass

$$\|f \cdot M\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E} \int_0^\infty f_s^2 \, d\langle M \rangle_s.$$

Abgabetermin: Fr. 28.11.2014, 12:00 Uhr, Briefkasten 145 (max 3 Pers. pro Abgabe).