Institut für
Mathematische Statistik

Ortgiese/Schubert
WS 2014/2015

Übungsaufgaben zur Stochastischen Analysis

Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $(M^n)_n$ eine Folge von $\mathbb{F}$-Martingalen und M_t sei der L^1-Limes von M_t^n für jedes $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass $(M_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-Martingal ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Kovariation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinear, symmetrisch und positiv semidefinit ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Gegeben seien Martingale $M \in \mathcal{M}^0$ (bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) und $N \in \mathcal{M}^0$ (bezüglich $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$) so, dass $\mathcal{F}_\infty$ und $\mathcal{G}_\infty$ unabhängig sind.

(a) Zeigen Sie, dass M, N und das Produkt MN Martingale in $\mathcal{M}^0$ bezüglich der Filtration $\mathcal{H}_t := \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t)$ sind.

(b) Folgern Sie, dass $\langle M, N \rangle = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Geben Sie (mit Begründung) zwei stochastische Prozesse $X, Y \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$ an, so dass

(a) $\langle X + Y \rangle_t \neq \langle X \rangle_t + \langle Y \rangle_t$ für alle $t > 0$.

(b) $\langle X + Y \rangle_t = \langle X \rangle_t + \langle Y \rangle_t$ für alle $t \geq 0$.

Abgabetermin: Fr. 21.11.2014, 12:00 Uhr, Briefkasten 145 (max 3 Pers. pro Abgabe).