Institut für
Mathematische Statistik

Ortgiese/Schubert
WS 2014/2015

Übungsaufgaben zur Stochastischen Analysis

Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Wenn $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist, dann ist F von beschränkter Variation.

(b) Die Menge $\mathcal{A}$ aus der Vorlesung ist ein Vektorraum.

(c) Für $X \in \mathcal{A}$ ist $V \in \mathcal{A}^+$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für einen reellwertigen stetigen Prozess X von (lokal) beschränkter Variation die quadratische Variation verschwindet, d.h. für alle $\delta > 0$ und $t \geq 0$ ist

$$\lim_{\Delta \in \mathcal{D}, \|\Delta\| \to 0} \mathbb{P}\{T_t^\Delta \geq \delta\} = 0.$$

.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass für ein Martingal M gilt:

(a) Für $0 \leq u \leq s < t$

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_u] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_u].$$

(b) Für $0 \leq t_k \leq s < t_{k+1}$

$$\mathbb{E}[(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_{t_{k+1}} - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] + (M_s - M_{t_k})^2.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei B eine Brown'sche Bewegung und sei Δ_n die Partition von $[0, t]$ gegeben durch $t_j = j2^{-n}t$ mit $j = 0, \ldots 2^n$. Zeigen Sie,

$$\lim_{n \to \infty} T_t^{\Delta_n} = t \quad \text{fast sicher.}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Erwartungswert und die Varianz von $T_t^{\Delta_n}$ und nutzen Sie dann das Borel-Cantelli-Lemma. Sie dürfen eine Formel für das vierte Moment einer Normalverteilung mit Erwartungswert Null ohne Beweis verwenden.

Abgabetermin: Fr. 14.11.2014, 12:00 Uhr, Briefkasten 145 (max 3 Pers. pro Abgabe).