Institut für
Mathematische Statistik

Ortgiese/Schubert
WS 2014/2015

# Übungsaufgaben zur Stochastischen Analysis

Blatt 3

**Aufgabe 1** (3 Punkte)

(a) Sei $X_t$ ein $\mathcal{F}_t$-Martingal. Weiter sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit $\mathbb{E}(|\varphi(X_t)|) < \infty$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann $(\varphi(X_t))_t$ ein $\mathcal{F}_t$-Submartingal ist.

(b) Sei $X_t$ ein $\mathcal{F}_t$-Submartingal. Weiter sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe nicht-fallende Funktion mit $\mathbb{E}(|\varphi(X_t)|) < \infty$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $(\varphi(X_t))_t$ ein $\mathcal{F}_t$-Submartingal ist.

(c) Sei $X$ ein rechtsstetiges Martingal. Zeigen Sie, dass dann

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}(X_t^+), \quad \lambda > 0,$$

wobei $X_t^+ = \max(0, X_t)$ den Positivteil von $X_t$ bezeichnet.

**Aufgabe 2** (3 Punkte)
Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges, nicht-negatives Supermartingal und $T = \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}$. Zeigen Sie,

$$X_{T+t} = 0 \quad \text{für alle } t \geq 0$$

fast sicher auf $\{T < \infty\}$.

**Aufgabe 3** (6 Punkte)
Sei $(N_t)_t$ ein Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $c > 0$ gilt

$$\limsup_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} (N_s - \lambda s) \geq c\sqrt{\lambda t}\right) \leq \frac{1}{c\sqrt{2\pi}}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $c > 0$ gilt

$$\limsup_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(\inf_{0 \leq s \leq t} (N_s - \lambda s) \leq -c\sqrt{\lambda t}\right) \leq \frac{1}{c\sqrt{2\pi}}.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\frac{N_t}{t}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\lambda$ konvergiert.

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda t}}\mathbb{E}(N_t - \lambda t)^+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ mit Hilfe der Stirling-Formel.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)
Sei $B$ sei eine standard Brown'sche Bewegung.

(a) Zeigen Sie, dass $(B_t^2 - t)_t$ ein Martingal ist.

(b) Sei $B_t$ gestartet in $x$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$. Sei

$$T^{a,b} := \inf\{t \geq 0 \,:\, B_t \leq a \text{ oder } B_t \geq b\}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}[T^{a,b}]$.

*Hinweis:* Sie dürfen Beispiel 1.39 der Vorlesung verwenden.

**Abgabetermin:** Fr. 7.11.2014, 12:00 Uhr, Briefkasten 145 (max 3 Pers. pro Abgabe).