Institut für Mathematische Statistik

Ortgiese/Schubert
WS 2014/2015

Übungsaufgaben zur Stochastischen Analysis

Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und τ und σ seien $\mathbb{F}$-Stoppzeiten. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{F}_\tau$ ist σ-Algebra

(ii) Für $\tau(\omega) = s$ für alle $\omega \in \Omega$ ist $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_s$

(iii) Für $0 \leq \sigma \leq \tau$ gilt $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$

(iv) $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei X ein $(E, \mathcal{E})$-wertiger progressiv messbarer stochastischer Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Weiter sei T eine Stoppzeit. Zeigen Sie, dass der Prozess $(X_{T \wedge t})_{t \geq 0}$ progressiv messbar ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für eine standard Brown'sche Bewegung B folgende Eigenschaften gelten:

(i) Für jedes $c > 0$ ist $(cB_{t/c^2})_{t \geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung.

(ii) Der Prozess X mit $X_0 := 0, X_t := tB_{\frac{1}{t}}$ für $t > 0$ ist eine Brown'sche Bewegung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für eine standard Brown'sche Bewegung B und $\alpha \geq 0$ durch

$$M_t := \exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t)$$

ein Martingal gegeben ist.

Abgabetermin: Fr. 31.10.2014, 12:00 Uhr, Briefkasten 145 (max 3 Pers. pro Abgabe).