Institut für
Mathematische Statistik

Ortgiese/Schubert
WS 2014/2015

Übungsaufgaben zur Stochastischen Analysis

Blatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das exponentielle Martingal $\exp\{M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\}$ immer ein Supermartingal ist, wenn $M \in \mathcal{M}^0_{\text{loc}}$.
Hinweis: Verwenden Sie den Optional-Stopping-Satz und das Lemma von Fatou.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei X ein stetiges Supermartingal mit $\mathbb{E}[X_t] = 1$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass X dann ein Martingal ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Betrachten Sie die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{1}$$

mit $b(t,x) \in \mathbb{R}^d, \sigma(t,x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Es gelten die folgenden Bedingungen

(i) $\sigma(t,x)$ ist eine invertierbare $d \times d$ Matrix für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^d$

(ii) $b(t,x)$ und $\sigma(t,x)^{-1}$ sind uniform beschränkt für $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$

(iii) die Gleichung

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T$$

hat eine schwache Lösung mit Startverteilung μ.

Zeigen Sie, dass (1) für $0 \leq t \leq T$ dann ebenfalls eine schwache Lösung mit Startverteilung μ besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei W ein stetiger Prozess, der bezüglich $\mathcal{F}_t$ adaptiert ist. Zeigen Sie, dass W genau dann eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung ist, wenn

$$f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(W_s)ds, \quad 0 \leq t < \infty$$

für jedes $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ein lokales Martingal (bzgl $\mathcal{F}_t$) ist. Hierbei bezeichnet Δf den Laplace-Operator, d.h. $\Delta f = \sum_{i=i}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Abgabetermin: Fr. 23.1.2015, 12:00 Uhr, Briefkasten 145 (max 3 Pers. pro Abgabe).