Institut für
Mathematische Statistik

Ortgiese/Schubert
WS 2014/2015

Übungsaufgaben zur Stochastischen Analysis

Blatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Wright-Fisher Diffusion (mit $d = m = 1$)

$$dX_t = \sqrt{X_t(1 - X_t)}\, dW_t, \quad X_0 = x \in [0, 1].$$

Nehmen Sie an, dass es (mindestens) eine starke Lösung gibt und zeigen Sie, dass diese eindeutig ist. Zeigen Sie außerdem, dass $X_t \in [0, 1]$ für alle $t \geq 0$ fast sicher gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Betrachten Sie für gegebene stetige Semimartigale X und H die lineare stochastische Differentialgleichung

$$Y_t = H_t + \int_0^t Y_s\, dX_s. \tag{1}$$

Bezeichne $L_X(H)$ die Lösung von (1).

(a) Zeigen Sie, dass für ein weiteres Semimartingal K gilt

$$L_X(H + K \cdot X) = L_X(H + K) - K.$$

(b) Seien X, Y Semimartingale und $Z := X + Y + \langle X, Y \rangle$. Zeigen Sie, dass es für Semimartingale H und K ein Semimartingal S gibt mit

$$L_X(H) \cdot L_Y(H) = L_Z(S)$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $T > 0$ und $\mathcal{E}^X$ sei ein Martingal. Zeigen Sie, dass für $0 \leq s \leq t \leq T$ und eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable Y mit $\tilde{\mathbb{E}}_T|Y| < \infty$ gilt

$$\tilde{\mathbb{E}}_T\,[Y|F_s] = \frac{1}{\mathcal{E}_s^X}\mathbb{E}[Y\mathcal{E}_t^X|\mathcal{F}_s] \quad \mathbb{P}\text{- und } \tilde{\mathbb{P}}_T \text{ fast sicher.}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $\gamma > 0$. Nehmen Sie an, dass X^1 und X^2 Lösungen von $dX_t^i = \sqrt{\gamma X_t^i}\, dW_t^i$ sind, wobei W^1 und W^2 unabhängige Brown'sche Bewegungen sind und $X_0^1 = x_1 > 0$ und $X_0^2 = x_2 > 0$. Zeigen Sie, dass $Z := X^1 + X^2$ eine schwache Lösung ist von

$$dZ_t = \sqrt{\gamma Z_t}\, dW_t,$$

mit $Z_0 = x_1 + x_2$ und W einer geeignet gewählten Brown'schen Bewegung.

Abgabetermin: Fr. 16.1.2015, 12:00 Uhr, Briefkasten 145 (max 3 Pers. pro Abgabe).