Institut für
Mathematische Statistik

Ortgiese/Schubert
WS 2014/2015

Übungsaufgaben zur Stochastischen Analysis

Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen

(a) Für eine Folge messbarer Funktionen $X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist auch $\sup_n X_n$ messbar.

(b) Für reellwertige Zufallsvariablen X, Y auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist $\{X = Y\} \in \mathcal{F}$.

(c) Sei (E, d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{E}$ und $Z_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ eine Folge von messbaren Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = Z(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann ist Z auch messbar.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien X und Y Modifikationen mit rechtsstetigen Pfaden. Zeigen Sie, dass X und Y ununterscheidbar sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $\tau : \Omega \to [0, \infty]$.

(a) Für $t \geq 0$ sei

$$\mathcal{F}_t^+ := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$ eine Filtration ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind

(i) τ ist schwache Stoppzeit, d.h. $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$

(ii) $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t^+$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Wir betrachten folgendes Modell zur Beschreibung der Entwicklung einer Populationsgröße: Seien $(Y_{n,k})_{n\in\mathbb{N}_0,k\in\mathbb{N}}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in N_0, wobei $Y_{n,k}$ die Anzahl der Nachkommen des k-ten Individuums in der n-ten Generation modelliert. Wir nehmen an, dass $\mathbb{E}(Y_{n,k}) = \mu < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$. Die Populationsgröße $S_n, n \in \mathbb{N}_0$ der n-ten Generation ist dann rekursiv definiert durch

$$S_0 := 1, \quad S_n := \sum_{k=1}^{S_{n-1}} Y_{n-1,k}, \quad n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$Z_n := \frac{S_n}{\mu^n}, \quad n \geq 0$$

ein Martingal bezüglich $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$ definiert wird.

Abgabetermin: Fr. 24.10.2014, 12:00 Uhr, Briefkasten 145 (max 3 Pers. pro Abgabe).