**Übungen**

Abgabetermin: Freitag, 19.12.2014, 12 Uhr

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Es seien $n$ Geräte gleicher Bauart gegeben. Die Lebensdauer des Geräts $i$ werde mit einer Zufallsvariable $X_i$ modelliert. Dabei seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\theta > 0$. Es soll ein Konfidenzintervall für die erwartete Lebensdauer $\frac{1}{\theta}$ bestimmt werden.

(i) Zeigen Sie, dass $2n\theta\bar{X}_n$ eine $\chi^2$-Verteilung mit $2n$ Freiheitsgraden hat.

(ii) Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für $\frac{1}{\theta}$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit der Dichte $h_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}\,\mathbb{1}_{x\geq\theta}$, wobei $\theta \in \mathbb{R}$ der unbekannte Parameter sei. Als Schätzer für $\theta$ betrachten wir $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Finden Sie für ein gegebenes $\alpha \in (0,1)$ Zahlen $p$ und $q$ (die nicht von $\theta$ abhängen) mit

$$\mathbb{P}_\theta[\theta < Y + p] = \mathbb{P}_\theta[\theta > Y + q] = \frac{\alpha}{2} \text{ für alle } \theta \in \mathbb{R}.$$

Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für $\theta$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

(i) Für jedes $r \in \mathbb{N}$ sei $Z_r$ eine $\chi^2$-verteilte Zufallsvariable mit $r$ Freiheitsgraden. Zeigen Sie, dass

$$\frac{Z_r - r}{\sqrt{2r}} \xrightarrow[r\to\infty]{d} N(0,1).$$

(ii) Für $\alpha \in (0,1)$ seien $z_\alpha$ und $\chi^2_{r,\alpha}$ die $\alpha$-Quantile der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ bzw. der $\chi^2_r$-Verteilung. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\chi^2_{r,\alpha} - r}{\sqrt{2r}} = z_\alpha.$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)
Es seien $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y_1, \ldots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, wobei $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ bekannt seien. Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für $\sigma_1^2/\sigma_2^2$. Dabei sei $\alpha \in (0, 1)$.