Übungen
Abgabetermin: Freitag, 28.11.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie die quadratische Verlustfunktion $D(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$. Bestimmen Sie den Bayes-Schätzer und das Bayes-Risiko dieses Schätzers für die folgenden Modelle:

(i) Gegeben $\theta > 0$ seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim \mathrm{Poi}(\theta)$. Die a-priori-Verteilung von θ sei durch die Gammaverteilung mit Parametern $\alpha, \beta > 0$ gegeben:

$$q(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, \quad \theta > 0.$$

(ii) Gegeben $\theta \in \mathbb{R}$ seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 > 0$ bekannt sei. Die a-priori-Verteilung von θ sei durch die Normalverteilung mit Erwartungswert $a \in \mathbb{R}$ und Varianz $b^2 > 0$ gegeben.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{Bern}(\theta)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, wobei $\theta \in (0, 1)$. Betrachten Sie die Verlustfunktion

$$D(\theta, \hat{\theta}) = \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{\theta(1-\theta)}.$$

(i) Bestimmen Sie das Risiko des Schätzers $\hat{\theta} = \overline{X}_n$ als Funktion von θ.

(ii) Zeigen Sie, dass $\overline{X}_n$ der Bayes-Schätzer von θ für die a-priori-Dichte $q(\theta) = \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)$ und die angegebene Verlustfunktion ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\overline{X}_n$ der Minimax-Schätzer von θ für die angegebene Verlustfunktion D ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Betrachten Sie die folgenden beiden Schätzer für $\theta := e^{-\lambda}$:

$$\hat{\theta}_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i = 0\}}, \quad \hat{\theta}_n^{(2)} = e^{-\overline{X}_n}.$$

(i) Sind diese Schätzer erwartungstreu / asymptotisch erwartungstreu?

(ii) Zeigen Sie, dass beide Schätzer asymptotisch normal verteilt sind und bestimmen Sie die asymptotische relative Effizienz. Welcher Schätzer ist im Sinne der asymptotischen relativen Effizienz besser?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Berechnen Sie für jeden der folgenden Fälle die Likelihood-Funktion und überprüfen Sie, ob $T = T(X_1, \dots, X_n)$ eine suffiziente Statistik ist. Zeigen Sie zusätzlich, dass der jeweilige Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ als Funktion von T darstellbar ist.

(i) $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit $X_i \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, $\theta > 0$ und $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$.

(ii) $X_1, \dots, X_n$ unabhängig (aber nicht identisch verteilt!) mit

$$X_1 \sim \mathrm{Poi}(\theta), X_2 \sim \mathrm{Poi}(2\theta), \dots X_n \sim \mathrm{Poi}(n\theta), \quad \theta > 0,$$

und $T = \sum_{i=1}^n X_i$.

(iii) $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma_i^2)$, σ_i^2 bekannt für $i \in \{1, \dots, n\}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i / \sigma_i^2$.