Übungen

Abgabetermin: Freitag, 21.11.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei $X \sim \mathrm{Bin}(m, p)$ mit bekanntem $m \in \mathbb{N}$ und unbekanntem $p \in (0, 1)$.
Zeigen Sie, dass es keinen erwartungstreuen Schätzer (bei einelementiger Stichprobe) für $\theta = \frac{1}{p}$ gibt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

(i) $X_i \sim \mathrm{Poi}(\theta)$, wobei $\theta > 0$ unbekannt ist.

(ii) $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, wobei $\theta \in \mathbb{R}$ unbekannt ist und $\sigma^2 > 0$ bekannt sei.

Berechnen Sie die Fisher–Information $I(\theta)$ und zeigen Sie, dass in beiden Fällen der Schätzer $\bar{X}_n$ erwartungstreu für θ und Cramér–Rao–effizient ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, wobei $\theta > 0$ unbekannt sei.

(i) Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für $1/\theta$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $1/\bar{X}_n$ *kein* erwartungstreuer Schätzer für θ ist und bestimmen Sie eine Konstante c (in Abhängigkeit von n), so dass $c/\bar{X}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $c/\bar{X}_n$ nicht Cramér–Rao–effizient ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Es seien $X, X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit einer stetigen Verteilungsfunktion. Es seien $X_{(1)} < \ldots < X_{(n)}$ die Ordnungsstatistiken von $X_1, \ldots, X_n$ (ohne Berücksichtigung von X). Berechnen Sie $\mathbb{P}[X < X_{(k)}]$ für $k = 1, \ldots, n$.