Übungen

Abgabetermin: Freitag, 14.11.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\theta > 0$. Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$h_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Schätzer $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, $\hat{\theta}_4$ seien definiert durch

$$\hat{\theta}_1 := X_{(n)},$$

$$\hat{\theta}_2 := X_{(n)} + X_{(1)},$$

$$\hat{\theta}_3 := \frac{n+1}{n} X_{(n)},$$

$$\hat{\theta}_4 := 2\overline{X}_n.$$

Zeigen Sie, dass $\hat{\theta}_1$ nicht erwartungstreu ist, die anderen Schätzer jedoch schon.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für einen gegebenen Wert des Parameters $p \in (0,1)$ seien die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch geometrisch verteilt mit Parameter p. Die a-priori-Verteilung des Parameters p sei die Beta-Verteilung mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Gegeben sei nun eine Realisierung $x_1, \dots, x_n$ der Variablen $X_1, \dots, X_n$. Bestimmen Sie die a-posteriori-Verteilung des Parameters p und den Bayes-Schätzer für p.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

$(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ sei eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ seien unabhängig und identisch gemäß $\mathbb{P}_\theta$ verteilt und $(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n))_{n \geq 1}$ sei eine Folge von Schätzern für den Parameter θ, für die gilt

(i) $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)) = \theta$ für alle $\theta \in \Theta$ (die Folge ist asymptotische erwartungstreu),

(ii) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)) = 0$ für alle $\theta \in \Theta$.

Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in \Theta$ diese Folge in Wahrscheinlichkeit (unter $\mathbb{P}_\theta$) gegen den tatsächlichen Parameter θ konvergiert (schwache Konsistenz).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, identisch verteilte und quadratisch integrierbare Zufallsgrößen mit unbekannter gemeinsamer Verteilungsfunktion F_θ. Es soll

$$\gamma(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1$$

geschätzt werden. Man bestimme unter allen **erwartungstreuen** Schätzern der Form

$$\hat{\gamma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{mit } (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$$

einen besten (bez. des mittleren quadratischen Fehlers).