Übungen

Abgabetermin: Freitag, 31.10.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Stichprobe. Sei $\bar{x}_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ das Stichprobenmittel.

(a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 + n(\bar{x}_n - b)^2 \text{ für jedes } b \in \mathbb{R}.$$

(b) Es sei $s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$ die Stichprobenvarianz. Leiten Sie aus Teil (a) die Formel

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}_n^2\right)$$

her.

(c) Für welchen Wert von b wird die Funktion

$$f(b) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - b)^2$$

minimal?

Bemerkung. In der Mechanik ist die Gleichung aus (a) als Satz von Steiner bekannt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var} X_1 = \sigma^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass die Stichprobenvarianz

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2$$

ein stark konsistenter Schätzer für σ^2 ist, d.h.

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} S_n^2 = \sigma^2\right) = 1.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit *bekanntem* Erwartungswert μ und unbekannter Varianz $\sigma^2 < \infty$.
Zeigen Sie, dass

$$T_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist, d.h. $\mathbb{E} T_n = \sigma^2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen und $\hat{F}_n$ die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe $(X_1, \dots, X_n)$. Berechnen Sie

$$\mathrm{Cov}(\hat{F}_n(s), \hat{F}_n(t))$$

für $s, t \in \mathbb{R}$.