Kabluchko/Heusel WS 2014/2015
23. Januar 2015

Mathematische Statistik

Probeklausur

Keine Abgabe! Besprechung am 30. Januar in der letzten Vorlesung.

Der Umfang der Probeklausur entspricht nicht dem der Klausur.

Aufgabe 1

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und auf $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Dabei sei $\theta \in \mathbb{R}$ der unbekannte Parameter.

(a) Schätzen Sie θ mit der Momentenmethode.

(b) Schätzen Sie θ mit der Maximum–Likelihood–Methode. (Geben Sie alle Stellen an, wo die Likelihood–Funktion maximal ist).

Aufgabe 2

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und Poisson–verteilt mit Parameter $\theta > 0$. Zeigen Sie, dass die Schätzer $\bar{X}_n$ und S_n^2 erwartungstreu für θ sind. Welcher der beiden Schätzer hat eine kleinere Varianz?

Aufgabe 3

Seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{N}(0, \theta)$ unabhängig, wobei $\theta > 0$ der unbekannte Parameter ist. Zeigen Sie, dass die Statistik $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$ suffizient ist. Geben Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für θ an. Erreicht dieser Schätzer die Cramér–Rao–Schranke?

Aufgabe 4

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und Poisson–verteilt mit Parameter $\theta > 0$. Bestimmen Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für $\gamma := e^{-\theta}\theta^2/2$.

Aufgabe 5

Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit der folgenden Lebesgue–Dichte:

$$f_{\theta_1,\theta_2}(t) := (\theta_1 - 1) \cdot \theta_2^{(\theta_1 - 1)} \cdot t^{-\theta_1} \cdot \mathbf{1}_{[\theta_2,\infty)}(t)$$

mit unbekannten Parametern $\theta_1 > 1$ und $\theta_2 > 0$. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ für (θ_1, θ_2).

Aufgabe 6

Unter den ersten $n = 10.000.000$ Dezimalstellen der Zahl π gibt es genau 999.440 Nullen. Testen Sie mit einem asymptotischen Test die Hypothese H_0 : “Die Häufigkeit von 0 ist gleich 1/10” gegen die Hypothese H_1: “Die Häufigkeit von 0 ist ungleich 1/10”. Das Niveau sei $\alpha = 0.05$.

Aufgabe 7

Betrachten Sie das Modell $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, wobei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ unabhängig sind.

(a) Schätzen Sie β und σ^2 mit der Maximum–Likelihood–Methode.

(b) Geben Sie symmetrische Konfidenzintervalle zum Niveau $1 - \xi$ für β und σ^2 an.

Aufgabe 8

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und $\mathrm{N}(\mu, 1)$-verteilten Zufallsvariablen, $\mu \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\varphi_n(X_1, \ldots, X_n) : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ der einseitige Gauß–z–Test zum Niveau α von $H_0 = \{\mu \leq 0\}$ gegen $H_1 = \{\mu > 0\}$ bei Beobachtung von $X_1, \ldots, X_n$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{E}_\mu \varphi_n(X_1, \ldots, X_n) < \mathbb{E}_\mu \varphi_{n+1}(X_1, \ldots, X_{n+1})$ für alle $\mu > 0, n \in \mathbb{N}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\mu \varphi_n(X_1, \ldots, X_n) = 1$ für alle $\mu > 0$.

c) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\mu \varphi_n(X_1, \ldots, X_n) = 0$ für alle $\mu < 0$.

Aufgabe 9

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und auf $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ gleichverteilt. Betrachten Sie die Statistiken

$$G = \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad K = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $T := \frac{1}{2}(G + K)$ erwartungstreu ist.

b) Bestimmen Sie $\mathrm{Var}_\theta G$, $\mathrm{Var}_\theta K$ und $\mathrm{Cov}_\theta(G, K)$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Var}_\theta T < \mathrm{Var}_\theta \bar{X}_n$.

Aufgabe 10

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und $\mathrm{N}(\mu, 1)$–verteilt, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt sei. Bestimmen Sie den besten erwartungstreuen Schätzer für $\gamma := e^{t\mu}$ bei festem $t \neq 0$.

Aufgabe 11

Bei einem gegebenen $\theta > 0$ seien $X_1, \ldots, X_n$ gleichverteilt auf $[0, \theta]$. Für θ nehmen wir eine a–priori Pareto–Verteilung mit der Dichte

$$q(\theta) = ac^a \theta^{-(a+1)} \mathbf{1}_{(c,\infty)}(\theta)$$

an. Dabei seien $a > 1$, $c > 0$ Parameter. Bestimmen Sie die a–posteriori–Verteilung und den Bayes–Schätzer für θ.