

## Übungen

Abgabetermin: Freitag, 23.1.2015, 12 Uhr

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Physiker möchte den elektrischen Leitwert  $\beta$  ( $\beta$  ist der Kehrwert des Widerstands  $R$ ) eines Leiters messen. Er legt die Spannungen  $x_1, \dots, x_n$  an und misst die Stromstärken  $y_1, \dots, y_n$ . Gehen Sie davon aus (Ohm'sches Gesetz), dass

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  die Messfehler sind. Schätzen Sie  $\beta$  mit der Methode der kleinsten Quadrate.

### Aufgabe 2 (6 Punkte)

Betrachten Sie das Modell aus Aufgabe 1:

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

Dabei sei  $\beta$  unbekannt,  $x_1, \dots, x_n$  bekannt und  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$ , unbekannter Varianz  $\text{Var } \varepsilon_i = \sigma^2$  sowie  $\mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0$  für alle  $i \neq j$ .

- (i) Bestimmen Sie den besten linearen erwartungstreuen Schätzer  $\hat{\beta}$  für  $\beta$ .
- (ii) Betrachten Sie den Schätzer

$$\bar{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}.$$

Zeigen Sie, dass  $\bar{\beta}$  linear und erwartungstreu ist. Bestimmen Sie die Varianz von  $\bar{\beta}$  und zeigen Sie, dass  $\text{Var } \beta \geq \text{Var } \bar{\beta}$ .

- (iii) Konstruieren Sie einen erwartungstreuen Schätzer für  $\sigma^2$ .

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für feste Werte  $x_1, \dots, x_n$  seien  $y_1, \dots, y_n$  Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  unabhängige Zufallsvariablen seien mit  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, k_i \sigma^2)$ . Dabei seien  $k_1, \dots, k_n > 0$  bekannt und  $\sigma^2$  unbekannt.

Schätzen Sie  $\alpha, \beta, \sigma^2$  mit der Maximum-Likelihood-Methode.