Übungen

Abgabetermin: Freitag, 16.1.2015, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f_\mu(x) = e^{-(x-\mu)}, \; x \in [\mu, \infty).$$

Dabei sei $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt. Geben Sie für bekanntes $\mu_0 \in \mathbb{R}$ den Likelihood–Quotienten–Test für $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie den Likelihood–Quotienten–Test für $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ gegen $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ bei unbekanntem Parameter μ.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ und $Y_1, \dots, Y_m$ Zufallsvariablen mit folgenden Eigenschaften:

1) $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ sind unabhängig.
2) $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$.
3) $Y_1, \dots, Y_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$.

Testen Sie die Nullhypothese H_0 gegen die Alternativhypothese H_1 zum Niveau $\alpha \in (0,1)$, wenn

(i) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ und $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

(ii) $H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ und $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und auf dem Intervall $[0, \theta]$ gleichverteilt, $\theta > 0$. Sei $\theta_0 > 0$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass für die Hypothesen $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$ jeder Test φ mit

  (a) $\mathbb{E}_{\theta_0}(\varphi(X_1, \ldots, X_n)) = \alpha$
  (b) $\mathbb{E}_{\theta}(\varphi(X_1, \ldots, X_n)) \leq \alpha$ für $\theta \leq \theta_0$ und
  (c) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1$ für $\max(x_1, \ldots, x_n) > \theta_0$

bereits gleichmäßig bester Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ ist. Geben Sie einen solchen Test an.

(b) Seien nun $H_0' : \theta = \theta_0$ und $H_1' : \theta \neq \theta_0$. Zeigen Sie, dass folgender Test gleichmäßig bester Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ ist:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \max(x_1, \ldots, x_n) > \theta_0 \text{ oder } \max(x_1, \ldots, x_n) \leq \theta_0 \alpha^{1/n}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$