

Übungen ¹

Abgabetermin: 9.1.2015

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei \mathbb{P}_0 und \mathbb{P}_1 zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$. Sei φ^* ein bester Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für die Nullhypothese \mathbb{P}_0 gegen die Alternativhypothese \mathbb{P}_1 . Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}_1 \varphi^* \geq \alpha$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie, welche der folgenden Klassen von Verteilungen einen monotonen Dichtequotienten (in einer geeigneten Statistik T) besitzen:

- $U[0, \theta], \theta > 0$.
- $\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\lambda} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\theta}\right) \mathbf{1}_{[0, \theta]} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{(\theta, 1]}, \theta \in (0, 1)$.
- Gamma(α, β), $\beta > 0$, für festes $\alpha > 0$.

Alle Verteilungen sind auf \mathbb{R} definiert und λ bezeichnet das Lebesgue-Maß.

Hinweis: In der Definition des monotonen Dichtequotienten setzen wir $0/0 = +\infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und auf $[0, \theta]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, wobei $\theta > 0$ der unbekannte Parameter sei. Für $c > 0$ sei $\varphi_c : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$\varphi_c(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{1}_{\{M_n \geq c\}}(x_1, \dots, x_n),$$

wobei $M_n(x_1, \dots, x_n) := \max\{x_1, \dots, x_n\}$.

- Bestimmen Sie die Gütefunktion $\mathbb{E}_\theta[\varphi_c]$ von φ_c , und zeigen Sie, dass diese monoton wachsend in θ ist.
- Es seien $H_0 = (0, 1/2]$ und $H_1 = (1/2, \infty)$. Bestimmen Sie c so, dass die maximale Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art gleich 0.05 ist. Wie groß muss für den so erhaltenen Test $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit für $\theta = 3/4$ die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art höchstens 0.02 beträgt?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Man beobachtet eine Realisierung x einer Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}_\theta(X = x) = (1 - \theta)^{x-1} \theta$ für $x \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0, 1)$. Geben Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ für $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ gegen $H_1 : \theta = \frac{1}{4}$ an. Wie entscheiden Sie sich bei $x = 5$? Berechnen Sie die Gütefunktion des Tests.

¹Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
<http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1415/Statistik/>