Übungen

Abgabetermin: Freitag, 24.10.2014, 10 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Berechnen Sie das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz der Stichprobe

$$x_1 = 1, \ \ x_2 = 2, \ \ \ldots, \ \ x_n = n.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei

$$s_n^2(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right)^2$$

die Stichprobenvarianz der Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$s_n^2(x_1 + b, \ldots, x_n + b) = s_n^2(x_1, \ldots, x_n).$$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$s_n^2(ax_1, \ldots, ax_n) = a^2 s_n^2(x_1, \ldots, x_n).$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ reelle Zahlen, die aufsteigend sortiert sind.
Beschreiben Sie die Menge aller $a \in \mathbb{R}$, für die die Funktion

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - a|$$

minimal wird.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$. Die Lösung ist für ungerade n einfacher als für gerade n.
Betrachten Sie die Ableitung von f an den Stellen, an denen sie existiert.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Eine Zufallsvariable Z hat Betaverteilung mit Parametern $\alpha > 0$, $\beta > 0$, falls die Dichte von Z die folgende Form hat:

$$f_Z(t) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}, \qquad \text{falls } t \in [0,1],$$

und 0 sonst.

(i) Zeigen Sie, dass
$$\mathbb{E}\, Z = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

(ii) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Die Ordnungsstatistiken seien mit $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\, X_{(i)} = \frac{i}{n+1} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Hinweis zu (a): Sie können die Formel $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ohne Beweis verwenden.