

Lösung zu Aufgabe 1 Blatt 9

Wir befinden uns in einem arbitragefreien 1-Perioden-Trinomialmodell. Die risikofreie Anlage β ist gegeben durch

$$\beta_0 = 1 \quad \text{und} \quad \beta_1 = 1 + \rho$$

mit $\rho > -1$. Die risikobehaftete Anlage S ist gegeben durch

$$S_0 = 5 \quad \text{und} \quad S_1 = \begin{cases} S_1(\omega_1) = d \cdot S_0 \\ S_1(\omega_2) = m \cdot S_0 \\ S_1(\omega_3) = u \cdot S_0 \end{cases}$$

mit $d = \frac{2}{3}$, $m = 1$, $u = \frac{4}{3}$.

Bestimmung des Kegels der upper-hedgebaren Claims

Wir greifen bei der Lösung dieser Aufgabe auf die Lösung von Aufgabe 1 auf Blatt 8 zurück. Dort hatten wir herausgefunden, dass die Menge aller äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{P}^*$ als Teilmenge aller W-Maße im Trinomialmodell $\mathcal{P}$ durch die Bedingung

$$p_u^* - p_d^* = \frac{1}{2}$$

charakterisiert werden, wobei

$$\begin{aligned} p_d^* &:= P^*(\{\omega_1\}) = P^*(\{S_1 = d \cdot S_0\}) \\ p_m^* &:= P^*(\{\omega_2\}) = P^*(\{S_1 = m \cdot S_0\}) \\ p_u^* &:= P^*(\{\omega_3\}) = P^*(\{S_1 = u \cdot S_0\}). \end{aligned}$$

Die Menge der äquivalenten Martingalmaße wird also durch die Menge aller Tripel (p_d^*, p_m^*, p_u^*) beschrieben, die die folgenden Bedingungen erfüllen (vgl. Abbildung 1):

- $p_d^*, p_m^*, p_u^* > 0$,
- $p_d^* + p_m^* + p_u^* = 1$,
- $p_u^* - p_d^* = \frac{1}{2}$.

$\mathcal{P}^*$ wird durch die beiden Randpunkte $P_1 := (0, 1/2, 1/2)$ und $P_2 := (1/4, 0, 3/4)$ beschränkt. Wir wissen, dass die Menge der äquivalenten Martingalmaße konvex ist. Deshalb lässt sich jedes $P^* \in \mathcal{P}^*$ darstellen als Konvex-Kombination von P_1 und P_2 , d.h. $P^* = \lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2$ für ein geeignetes λ mit $0 < \lambda < 1$.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Menge $\mathcal{K}^*$ aller zum Anfangskapital 0 upper-hedgebaren Claims dem Kegel

$$\text{cone}(\mathcal{P}^*)^0 = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle x, y \rangle \leq 0 \text{ für alle } x \in \text{cone}(\mathcal{P}^*)\}$$

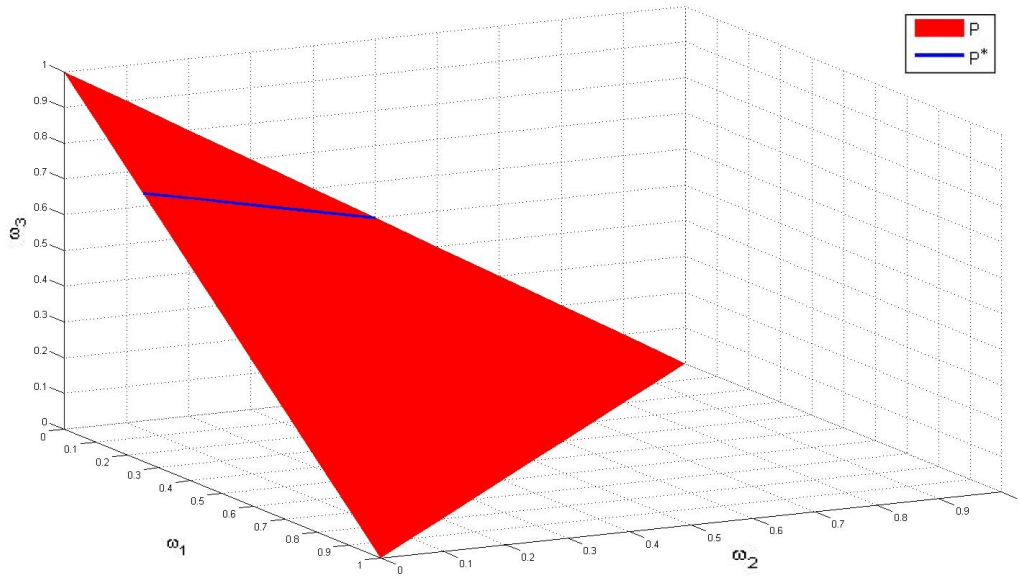


Abbildung 1. Zeigt die Mengen $\mathcal{P}$ aller W-Maße und $\mathcal{P}^*$ aller risikoneutralen Maße im Trinomialmodell.

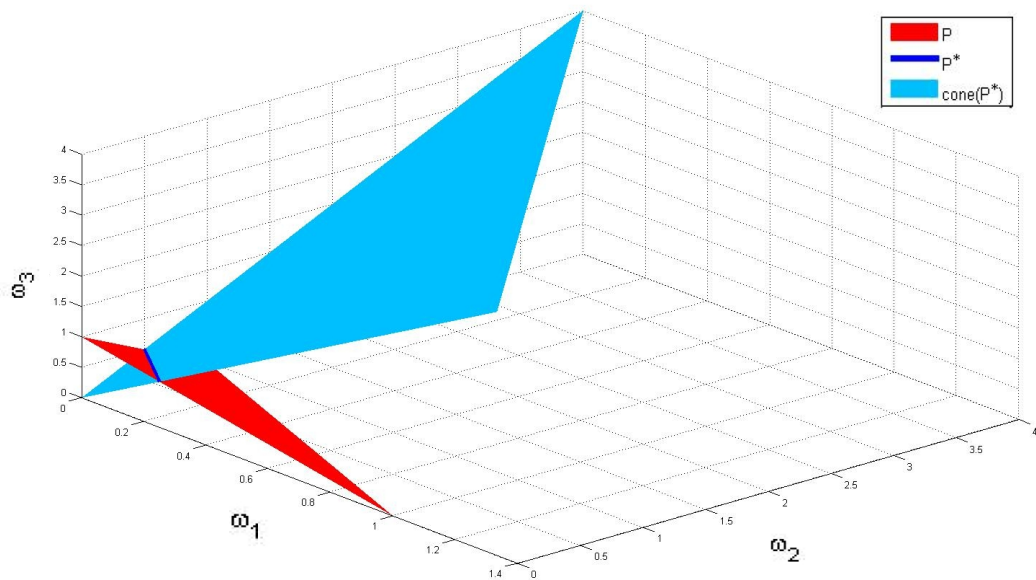


Abbildung 2. Zeigt die Mengen $\mathcal{P}$ aller W-Maße und $\mathcal{P}^*$ aller risikoneutralen Maße im Trinomialmodell und den Kegel $\text{cone}(\mathcal{P}^*)$.

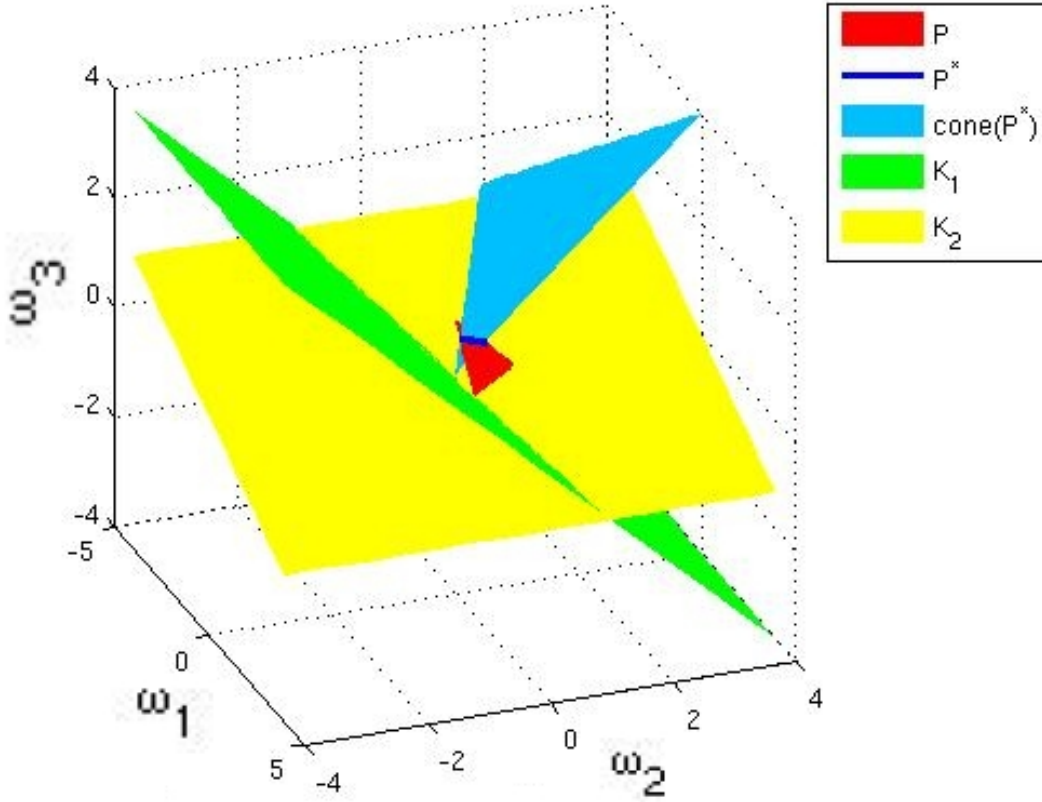


Abbildung 3. Erweitert Abbildung 2 um die beiden trennenden Ebenen K_1 und K_2 .

entspricht.

Definiere nun für $i = 1, 2$

$$\mathcal{K}_i^* := \text{cone}(P_i)^0 = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle P_i, y \rangle \leq 0\}.$$

Dann gilt $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}_1^* \cap \mathcal{K}_2^*$, denn für beliebige $y \in \mathcal{K}_1^* \cap \mathcal{K}_2^*$ und $P^* = \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 \in \mathcal{P}^*$ ist

$$\langle y, P^* \rangle = \langle y, \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 \rangle = \lambda \underbrace{\langle y, P_1 \rangle}_{\leq 0} + (1 - \lambda) \underbrace{\langle y, P_2 \rangle}_{\leq 0} \leq 0,$$

d.h. $\mathcal{K}_1^* \cap \mathcal{K}_2^* \subseteq \mathcal{K}^*$.

Umgekehrt gilt $\mathcal{K}^* \subseteq \mathcal{K}_1^* \cap \mathcal{K}_2^*$, da $\mathcal{K}^* = \text{cone}(\mathcal{P}^*)^0 = \overline{\text{cone}(\mathcal{P}^*)}^0$ und $P_1, P_2 \in \overline{\text{cone}(\mathcal{P}^*)}^0$.

Die Ebenen $K_i := \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle P_i, y \rangle = 0\}$, $i = 1, 2$, unterteilen den $\mathbb{R}^3$ jeweils in zwei Halbräume, wobei die Mengen $\mathcal{K}_i^*$ durch den jeweils zum Punkt P_i gegenüberliegenden Halbraum gegeben sind (vgl. Abbildung 3). Die Menge $\mathcal{K}^*$ ist dann also der Schnitt dieser beiden Halbräume (vgl. Abbildung 4).

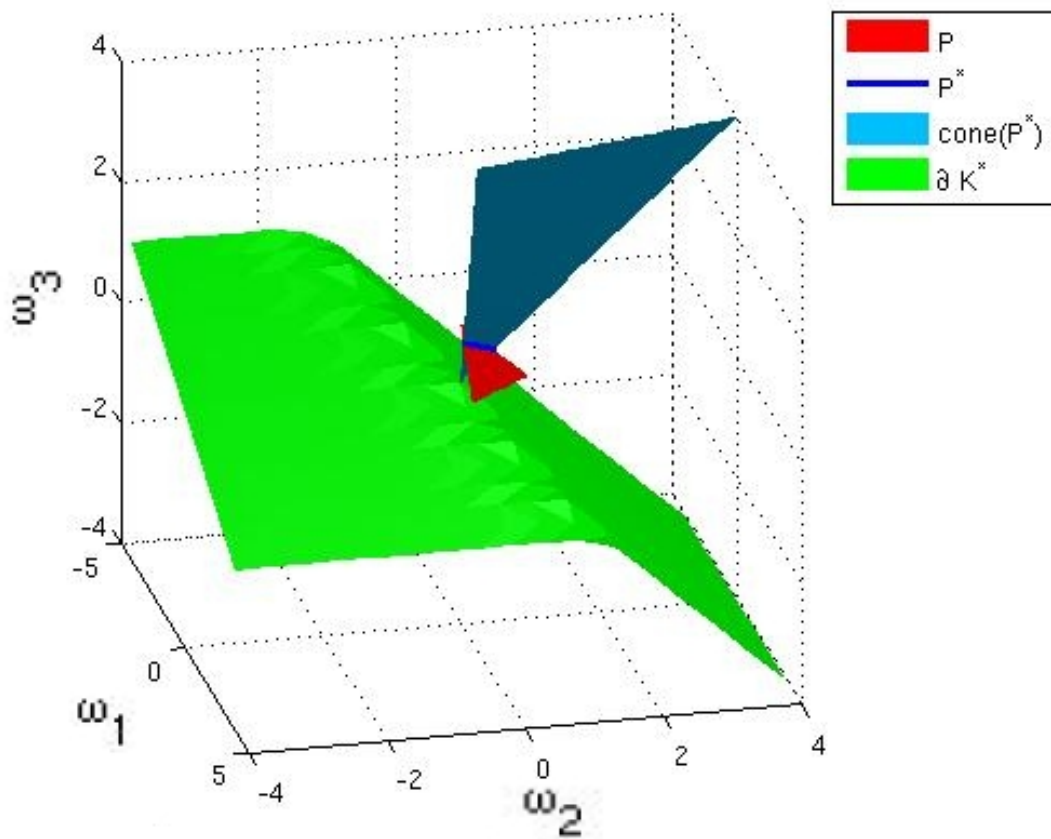


Abbildung 4. Erweitert Abbildung 2 um den Rand ∂K^* der gesuchten Menge K^* .

Der upper-hedging price

Kommen wir nun zur Bestimmung des upper-hedging-price. Wir suchen also

$$p_+(C) = \inf \{x : C \text{ ist upper-hedgebar zum Anfangskapital } x\}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass ein Claim C upper-hedgebar zum Anfangskapital x ist, falls $C^* - x \in \mathcal{K}^*$, wobei C^* den Claim C ausgedrückt in Einheiten des Numeraire-Assets darstellt.

Für unseren Fall bedeutet das, dass wir das minimale $x \in \mathbb{R}$ suchen mit

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{6}{7} - \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^*.$$

Anders formuliert suchen wir $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{6}{7} - \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \partial \mathcal{K}^*,$$

wobei $\partial \mathcal{K}^*$ den Rand von $\mathcal{K}^*$ bezeichnet.

Dazu betrachten wir die Gerade

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 30/7 \\ 12/7 \\ 24/7 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen ihre Schnittpunkte mit den Ebenen K_1 und K_2 .

Bestimmung des Schnittpunktes S_1 von g_1 mit K_1 :

Wir erhalten S_1 über den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 30/7 \\ 12/7 \\ 24/7 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auflösen nach x liefert

$$x = \frac{18}{7} \text{ und } S_1 = \begin{pmatrix} 12/7 \\ -6/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Schnittpunktes S_2 von g_1 mit K_2 :

Mit einem für K_2 entsprechenden Ansatz erhalten wir

$$x = \frac{51}{14} \text{ und } S_2 = \begin{pmatrix} 9/14 \\ -27/14 \\ -3/14 \end{pmatrix}$$

Zulässigkeit der Schnittpunkte:

Zuletzt muss noch die Zulässigkeit der Schnittpunkte überprüft werden, d.h. ob S_1 und S_2 tatsächlich in $\mathcal{K}^*$ liegen. Da $S_1 \in K_1$ und $S_2 \in K_2$ gilt natürlich $\langle S_1, P_1 \rangle = \langle S_2, P_2 \rangle = 0$. Es muss also noch überprüft werden, ob auch $\langle S_1, P_2 \rangle \leq 0$ bzw. $\langle S_2, P_1 \rangle \leq 0$ gilt.

Es gilt:

$$\langle S_2, p_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 9/14 \\ -27/14 \\ -3/14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{30}{28} < 0$$

und

$$\langle S_1, p_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 12/7 \\ -6/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{30}{28} > 0.$$

Es ist also nur S_2 zulässig. Wir erhalten deshalb als upper-hedgin-price $p_+(C) = \frac{51}{14}$.

Der lower-hedging price

Bestimmen wir nun den lower-hedgin-price

$$p_-(C) = \sup \{x : C \text{ ist lower-hedgebar zum Anfangskapital } x\}.$$

Ein Claim C ist lower-hedgebar zum Anfangskapital x genau dann, wenn $-C$ upper-hedgebar zum Anfangskapital $-x$ ist. Diese Beziehung erlaubt uns eine analoge Vorgehensweise zur Bestimmung des upper-hedging-price.

Wir suchen also nun das maximale $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{6}{7} + \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^*.$$

Dies entspricht wieder der Suche nach einem $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{6}{7} + \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \partial \mathcal{K}^*.$$

Dazu betrachten wir diesmal die Gerade

$$g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} -30/7 \\ -12/7 \\ -24/7 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen ihre Schnittpunkte mit den Ebenen K_1 und K_2 .

Aus Symmetriegründen erhalten wir nun die Schnittpunkte $-S_1$ und $-S_2$. Entsprechend ist diesmal nur $-S_1$ zulässig. Wegen

$$-S_1 - \begin{pmatrix} -30/7 \\ -12/7 \\ -24/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12/7 \\ 6/7 \\ -6/7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -30/7 \\ -12/7 \\ -24/7 \end{pmatrix} = \frac{18}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

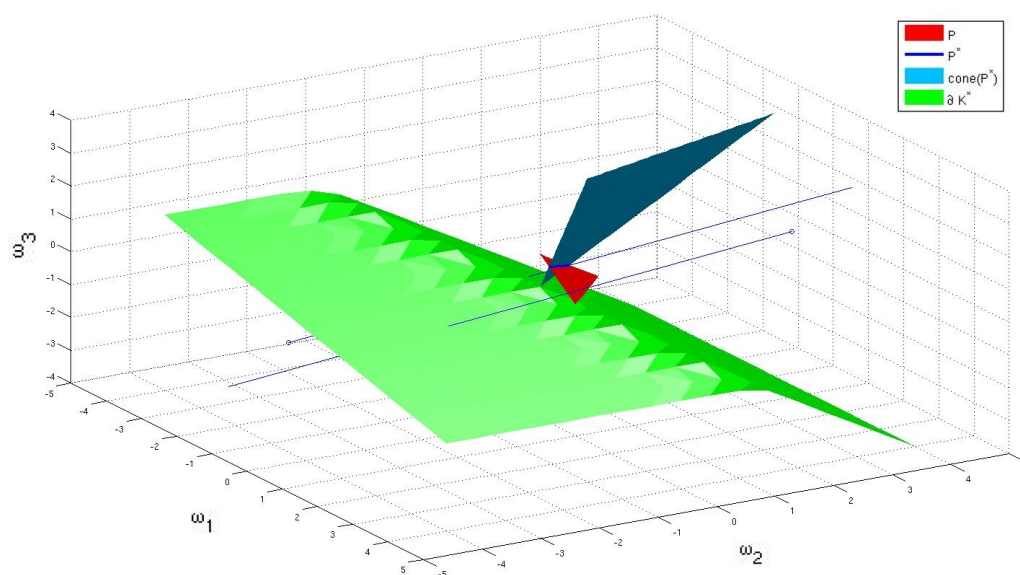


Abbildung 5. *Erweitert Abbildung 4 um die beiden Geraden g_1 und g_2 .*

ergibt sich als lower-hedging-price $p_-(C) = \frac{18}{7}$.

Alternativ lassen sich upper- und lower-hedging-price auch über einen Ansatz wie in Aufgabe 2 bestimmen, d.h. mit Hilfe des Simplex-Algorithmus. Dabei sollte das gleiche Ergebnis herauskommen.

Des Weiteren wurde in dieser Lösung davon ausgegangen, dass $S_1(\omega_1) = d \cdot S_0$ und $S_1(\omega_3) = u \cdot S_0$. Oftmals wird bei der Definition des Trinomialmodells auch $S_1(\omega_1) = u \cdot S_0$ festgelegt. Bei dieser Herangehensweise erhält man natürlich andere Ergebnisse, nämlich $p_-(C) = 3$ und $p_+(C) = 4\frac{1}{14}$.