

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2014/15

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 7

25.11.2014

Aufgabe 1: Ruinwahrscheinlichkeit beim Roulette

Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \in \mathbb{N}_0$ eine Irrfahrt in $\mathbb{Z}$, die aus dem Nullpunkt startet und

$$\mathbb{P}(X_1 = K) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1)$$

erfüllt für ein $K \in \mathbb{N}$. Für jedes $b \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Überlebenswahrscheinlichkeit $U(b)$ durch

$$U(b) = \mathbb{P}(S_n \leq b \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0) = \mathbb{P}(M \leq b),$$

wobei $M = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$ gesetzt wird.

Zeigen Sie

1. Für alle $b \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$U(b) = (1-p)U(b+1) + pU(b-K)1_{[K,\infty)}(b).$$

2. Setzt man $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)z^k$ für alle $0 < z < 1$, so gilt

$$g(z) = \frac{1-p}{z}(g(z) - U(0)) + pz^K g(z)$$

und damit

$$g(z) = (1-p)U(0)(1-p-z+pz^{K+1})^{-1}$$

für all $0 < z < 1$.

3. Ist

$$\mathbb{E}X_1 = Kp - (1-p) = (K+1)p - 1 < 0,$$

so ist

$$U(0) = 1 - \frac{p}{1-p}K < 1$$

und für

$$a_k = \mathbb{P}(M = k) = U(k) - U(k-1), a_0 = U(0)$$

gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = U(0) \left(1 - \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^K z^i\right)^{-1}$$

4. Wie können Sie dies benutzen, um die Ruinwahrscheinlichkeit der Bank beim Roulette zu berechnen, wenn ein Spieler nacheinander immer einen Euro auf die Zahl 20 setzt.

Lösung

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}
 U(b) &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 1} S_k \leq b) \\
 &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 1} S_k \leq b, X_1 = -1) + \mathbb{P}(\sup_{k \geq 1} S_k \leq b, X_1 = K)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Im Falle $b < K$ würde ein erster Aufwärtssprung sofort zum Ruin für die Bank führen. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
 U(b) &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 1} S_k \leq b, X_1 = -1) \\
 &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 1} (-1 + S_k - X_1) \leq b, X_1 = -1) \\
 &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 2} (-1 + S_k - X_1) \leq b, X_1 = -1) \\
 &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 2} (S_k - X_1) \leq b + 1, X_1 = -1) \\
 &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 2} (S_k - X_1) \leq b + 1) \mathbb{P}(X_1 = -1) \\
 &= U(b + 1)(1 - p)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Im Fall $b \geq K$ müssen sowohl ein erster Aufwärts- als auch Abwärtssprung betrachtet werden. Die gleiche Argumentation wie oben liefert

$$\mathbb{P}(\sup_{k \geq 1} S_k \leq b, X_1 = -1) = \mathbb{P}(\sup_{k \geq 2} (S_k - X_1) \leq b + 1) \mathbb{P}(X_1 = -1) = U(b + 1)(1 - p).$$

Für einen ersten Aufwärtssprung kann analog argumentiert werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\sup_{k \geq 1} S_k \leq b, X_1 = K) &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 1} (K + S_k - X_1) \leq b, X_1 = K) \\
 &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 2} (S_k - X_1) \leq b - K, X_1 = K) \\
 &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 2} (S_k - X_1) \leq b - K) \mathbb{P}(X_1 = K) \\
 &= U(b - K)p
 \end{aligned} \tag{3}$$

Insgesamt ergibt sich also im Falle $b \geq K$

$$U(b) = U(b + 1)(1 - p) + U(b - K)p1_{[K, \infty)}(b) \tag{4}$$

Die Gleichung (4) ist eine Rekursionsgleichung zu deren Lösung es häufig sinnvoll ist einen Potenzreihenansatz durchzuführen.

Wegen $0 \leq U(n) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} U(n)z^n$ als Funktion in z eine Potenzreihe mit Radius größer gleich 1. Einsetzen der Rekursionsgleichung liefert

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} z^n ((1 - p)U(n + 1) + pU(n - K)p1_{[K, \infty)}(n))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-p}{z} \sum_{k \in \mathbb{N}} z^k U(k) + pz^K \sum_{k \in \mathbb{N}_0} U(k) z^k \\
&= \frac{1-p}{z} (g(z) - U(0)) + pz^K g(z)
\end{aligned} \tag{5}$$

Auflösen nach $g(z)$ liefert

$$g(z) = (1-p)U(0)(1-p-z+pz^{K+1})^{-1} \tag{6}$$

für alle $|z| < 1$.

Bis auf $U(0)$ ist damit $g(z)$ und damit auch durch Differentiation die $U(k)$, $k \geq 1$ bestimmt. Deshalb ist als nächstes $U(0)$ zu bestimmen.

Hat man eine positive Drift, i.e. $\mathbb{E}X_1 > 0$, so ist $U(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, da nach dem starken Gesetz der großen Zahlen der Random Walk gegen $+\infty$ strebt.

Sei nun $\mathbb{E}X_1 = (K+1)p - 1 < 0$, was einer negativen Drift entspricht. Das starke Gesetz der großen Zahlen liefert dann, dass der Random-Walk gegen $-\infty$ strebt. Deshalb ist $\mathbb{P}(M_\infty < \infty) = 1$, wobei $M_\infty = \sup_{k \geq 1} S_k$ gesetzt ist. Die Verteilungsfunktion von M_∞ ist durch die Werte $U(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben und die Zähldichte durch

$$a_0 = U(0), a_k = U(k) - U(k-1)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Somit folgt für die erzeugende Funktion von M_∞

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k &= U(0) + \sum_{k=1}^{\infty} (U(k) - U(k-1)) z^k \\
&= U(0) + \sum_{k=1}^{\infty} U(k) z^k - z \sum_{l=0}^{\infty} U(l) z^l \\
&= g(z) - zg(z) = g(z)(1-z).
\end{aligned} \tag{7}$$

Zusammen mit der Formel (6) folgt also

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k &= (1-p)U(0) \frac{1-z}{1-p-z+pz^{K+1}} \\
&= U(0) \left(1 - \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^K z^i\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{8}$$

Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ folgt also

$$U(0) = 1 - \frac{p}{1-p} K. \tag{9}$$

Damit ist die erzeugende Funktion von M_∞ explizit bestimmt und man kann durch Differentiation die Zähldichte erhalten. Obige Darstellung der erzeugenden Funktion kann man benutzen, um die Struktur der Verteilung von M_∞ anzugeben. Es gilt nämlich

$$\mathbb{E}z^{M_\infty} = U(0) \left(1 - \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^K z^i\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= U(0) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p}{1-p} K \right)^k \left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K z^i \right)^k \\
&= U(0) \sum_{k=0}^{\infty} (1 - U(0))^k m(z)^k
\end{aligned} \tag{10}$$

mit $m(z) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K z^j$. Die Funktion m ist die erzeugende Funktion der Gleichverteilung auf den Zahlen $\{1, \dots, K\}$ und man kann folgende Interpretation der Verteilung von M_{∞} geben.

Ist $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von iid auf $\{1, \dots, K\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen und ist N eine davon unabhängige Zufallsvariable mit

$$\mathbb{P}(N = k) = U(0)(1 - U(0))^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so hat M_{∞} die gleiche Verteilung wie $V = \sum_{k=1}^N Z_k$.

Der Fall $\mathbb{E}X_1 = (K+1)p - 1 = 0$ kann eigentlich fast analog zum Fall negativer Drift behandelt werden. Denn dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}z^M 1_{\{M_{\infty} < \infty\}} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \\
&= g(z)(1 - z) = U(0) \left(1 - \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^K z^i \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{11}$$

Die linke Seite konvergiert für $z \rightarrow 1$ gegen $\mathbb{P}(M_{\infty} < \infty)$. Die rechte Seite kann nur gegen einen endlichen Wert konvergieren, wenn $U(0) = 0$ ist, was $\mathbb{P}(M_{\infty} < \infty) = 0$ impliziert. In diesem Fall ist also auch $U(b) = 0$ für alle $b \in \mathbb{N}_0$.

Anwendung beim Roulette

Wir betrachten das Setzen von einem Euro auf Zahl beim Roulette. Der Spieler gewinnt dann mit Wahrscheinlichkeit $1/37$ den 35 fachen Einsatz und verliert mit Wahrscheinlichkeit $36/37$ seinen Einsatz. Aus Sicht der Bank erleidet diese bei zukzessivem Spielen zufällige Verluste der Höhe $X_1, X_2, \dots$, die alle iid sind mit

$$\mathbb{P}(X_1 = K) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1),$$

wobei $K = 35$ und $p = \frac{1}{37}$ gesetzt wird. Der fortlaufende Gesamtverlust ist dann ein Random Walk $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}_0$ und bei einem Anfangskapital $b \geq 0$ ist die Bank ruiniert, wenn der Gesamtverlust irgendwann b überschreitet. Die Überlebenswahrscheinlichkeit ist also $U(b)$ und man erhält wegen $U(0) = \frac{1}{36}$

$$\begin{aligned}
U(b) &= U(0) \sum_{k=0}^b (1 - U(0))^k \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k Z_j \leq b\right) \\
&\leq U(0) \sum_{k=0}^b (1 - U(0))^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - (1 - U(0))^{b+1} \\
&= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{b+1} \\
&\leq 1 - \left(\frac{18}{19}\right)^{b+1}
\end{aligned} \tag{12}$$

Der Wert $1 - \left(\frac{18}{19}\right)^{b+1}$ ist gerade die Überlebenswahrscheinlichkeit, wenn ein Spieler sukzessive immer auf einfache Chancen setzt.

Daher ist vom Standpunkt der Ruinwahrscheinlichkeit das Setzen auf Zahl für die Bank gefährlicher als das Setzen auf einfache Chancen.

Aufgabe 2:

Wir betrachten ein Finanzmarktmodell bestehend aus zwei Aktien über N Perioden. Beide Aktien haben den gleichen Anfangspreis. Ausgehend von einem Anfangskapital $x > 0$ investieren Sie am Anfang in Aktie 1 und wechseln zu Aktie 2 zu dem Zeitpunkt, an dem sie billiger ist als die erste Aktie. Formulieren Sie dies als Handelsstrategie. Ist diese selbstfinanzierend? Wie entwickelt sich der Vermögensprozeß dieser Handelsstrategie?

Lösung Aufgabe 2

Seien S_1 und S_2 die Preisprozesse der beiden Aktien und

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_2(n) < S_1(n)\} \wedge N.$$

Die obige Wechselstrategie entspricht folgender Handelsstrategie

$$H_1(k) = 1_{\{\tau > k\}}, H_2(k) = 1_{\{\tau \leq k-1\}}$$

für alle $k = 1, \dots, N$. Der Prozeß H ist vorhersehbar, da τ eine Stopzeit ist und somit

$$\{\tau > k\} = \{\tau \leq k-1\}^c \in \mathfrak{F}_{k-1}$$

gilt. Die Handelsstrategie H ist nicht selbstfinanzierend, da beim Tausch in Aktie 2 ein Geldbetrag übrig bleibt und konsumiert werden kann.

Hat man ein Geldmarktkonto mit Preisprozess β als Numeraire Asset im Markt, so kann man H selbstfinanzierend machen, indem man den überzähligen Betrag beim Wechsel der Aktie in das Bankkonto legt. Dies entspricht der Hinzunahme von

$$\phi(k) = \frac{S_1(\tau) - S_2(\tau)}{\beta(\tau)} 1_{\{\tau \leq k-1\}}$$

zur Strategie H_1, H_2 .

Eine andere Möglichkeit, eine selbstfinanzierende Wechselstrategie durchzuführen, besteht darin, entsprechend dem zur Verfügung stehenden Kapital die zweite Aktie zu kaufen. Dies entspricht der Strategie

$$H_1(k) = 1_{\{\tau > k\}}, H_2(k) = \frac{S_1(\tau)}{S_2(\tau)} 1_{\{\tau \leq k-1\}}$$

für alle $k = 1, \dots, N$.

Aufgabe 3: Multiplikative Doob-Meyer Zerlegung

Sei $(X(n)_{n \in \mathbb{N}_0})$ ein stochastischer Prozeß mit Werten in den positiven reellen Zahlen, der adaptiert ist bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\mathbb{E}X_n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass es genau eine Zerlegung der Form

$$X = Y \cdot M \cdot \Lambda$$

gibt mit $\mathfrak{F}_0$ -meßbarem Y , Martingal M und vorhersehbarem Λ , die beide aus der 1 starten.

Lösung:

Entscheidend ist die folgende Beobachtung:

Ein strikt positiver, integrierbarer Prozess M ist ein Martingal genau dann, wenn

$$\mathbb{E}\left(\frac{M_i}{M_{i-1}} \middle| \mathfrak{F}_{i-1}\right) = 1$$

gilt für alle $i \in \mathbb{N}$.

Ein Teleskopquotientenargument liefert dann nämlich

$$\begin{aligned} X_n &= X_0 \prod_{i=1}^n \frac{X_i}{X_{i-1}} \\ &= X_0 \prod_{i=1}^n \frac{X_i}{\mathbb{E}(X_i | \mathfrak{F}_{i-1})} \prod_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}(X_i | \mathfrak{F}_{i-1})}{X_{i-1}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Setzt man also

$$Y = X_0, M_n = \prod_{i=1}^n \frac{X_i}{\mathbb{E}(X_i | \mathfrak{F}_{i-1})}, \Lambda_n = \prod_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}(X_i | \mathfrak{F}_{i-1})}{X_{i-1}},$$

so hat man die gesuchte Zerlegung gefunden, denn Λ ist vorhersehbar und wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{M_n}{M_{n-1}} \middle| \mathfrak{F}_{n-1}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n | \mathfrak{F}_{n-1})} \middle| \mathfrak{F}_{n-1}\right) \\ &= \frac{\mathbb{E}(X_n | \mathfrak{F}_{n-1})}{\mathbb{E}(X_n | \mathfrak{F}_{n-1})} = 1 \end{aligned} \tag{14}$$

ist M ein Martingal.

Die Eindeutigkeit folgt wieder aus der Tatsache, dass ein vorhersehbares Martingal fast sicher konstant ist. Genauer ausgeführt haben wir zwei Zerlegungen der Form

$$Y' M' \Lambda' = X = Y M \Lambda$$

zu betrachten.

Dann ist wegen $1 = M'(0) = M(0) = \Lambda'(0) = \Lambda(0)$

$$Y' = X(0) = Y$$

und damit

$$\frac{M'}{M} = \frac{\Lambda}{\Lambda'}.$$

Zeige durch Induktion, dass $Z(n) = \frac{M'(n)}{M(n)}$ fast sicher konstant 1 ist für $n = 0, \dots, N$. Für $n = 0$ folgt dies, da beide Prozesse M, M' aus 1 starten.

Von n nach $n + 1$ kann man schließen mittels

$$M'(n) = \mathbb{E}(M'(n+1)|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(Z(n+1)M(n+1)|\mathfrak{F}_n) = Z(n+1)\mathbb{E}(M(n+1)|\mathfrak{F}_n) = Z(n+1)M(n)$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung ist $Z(n) = \frac{M'(n)}{M(n)} = 1$ und somit $Z(n+1) = 1$

Bemerken kann man allgemein folgendes:

Ist der Quotient von zwei positiven Martingalen vorhersehbar, so ist der Quotient ein vorhersehbares Martingal und damit konstant seinem Anfangswert.

Dies folgt aus

$$M'(n) = \mathbb{E}(M'(n+1)|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(Z(n+1)M(n+1)|\mathfrak{F}_n) = Z(n+1)\mathbb{E}(M(n+1)|\mathfrak{F}_n) = Z(n+1)M(n)$$

mit $Z(n) = \frac{M'(n)}{M(n)}$. Also ist

$$\frac{M'(n)}{M(n)} = Z(n+1) = \frac{M'(n+1)}{M(n+1)}.$$

Dies impliziert auch die Martingaleigenschaft, denn

$$\mathbb{E}\left(\frac{M'(n+1)}{M(n+1)}|\mathfrak{F}_n\right) = \frac{M'(n+1)}{M(n+1)} = \frac{M'(n)}{M(n)}.$$