

Institut für Mathematische Statistik

PD Dr. V. Paulsen

Wintersemester 2009/10

K L A U S U R

Mo, 01. Februar 2010, 16.00 – 19.00 Uhr

Name:

Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Note
Punkte	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	60	
erreichte Punkte												
Korrektur												

24 Punkte sind hinreichend für den Erwerb eines Leistungsnachweises.

Hinweise:

1. Bitte das Deckblatt **vollständig** und **lesbar** ausfüllen.
2. Beginnen Sie bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt.
3. Hilfsmittel sind bei der Bearbeitung der Aufgaben **nicht** zugelassen.
4. Alle Beweisschritte sind zu begründen.
5. Aufgaben können auch in Teilen bearbeitet werden.

Klausureinsicht: Do. 04.02.2010 12.15-12.45 im M4

Aufgaben

1. Formulieren Sie die Put-Call Parität und leiten Sie diese aus dem Replikationsprinzip her.
2. Sie betrachten folgendes Ein-Perioden Modell bestehend aus einer risikofreien Anlage und einer risikobehafteten Aktie:

- risikofreie Anlage: Anfangspreis 1, Endpreis $1 + r$.
- Aktie : Anfangspreis $A_0 = 100$, Endpreis $A_1(\omega_1) = uA_0, A_1(\omega_2) = dA_0$

mit $d = 0.8, u = 1.2, r = 0.1$. Dabei nehmen wir an, daß der zufällige Aktienpreis nur von zwei Zuständen ω_1, ω_2 abhängt, die jeweils mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen werden.

- (a) Berechnen Sie für den Claim C gegeben durch

$$C(\omega_1) = 10, \quad C(\omega_2) = -5$$

einen Hedge.

- (b) Geben Sie ein äquivalentes Martingalmaß an und berechnen Sie mit dessen Hilfe den arbitragefreien Anfangspreis von C . Wie ist der Zusammenhang mit (a)?

3. In einem arbitragefreien Ein-Perioden Modell über endlichem Ω bezeichnen wir für einen Claim C mit $\Pi(C)$ die Menge der Anfangspreise für C , die das um den Handel mit C erweiterte Modell arbitragefrei lassen. Bezeichne weiter mit $\mathcal{P}$ die Menge der äquivalenten Martingalmaße und mit r die Zinsrate der risikofreien Anlage.

Zeigen Sie:

- (a) $\Pi(C) = \{\mathbb{E}^* \frac{C}{1+r} : \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}\}$,
- (b) $\Pi(C)$ ist entweder eine einelementige Menge oder ein offenes Intervall.

4. Sei

$$A(n) = A(0) \prod_{i=1}^n Y_i, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ein geometrischer Random Walk mit integrierbarem $A(0)$.

Zeigen Sie:

- (a) Ist $\mathbb{E}Y_1 = 1$, so ist $(A(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal.
- (b) $(A(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Markovprozeß.

5. Sei $(M(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal und τ eine beschränkte Stoppzeit. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}M(\tau) = \mathbb{E}M(0).$$

6. In einem arbitragefreien CRR Modell über N Perioden mit Anfangspreis x bezeichne für einen Claim, der am Ende der N -ten Periode $h(A(N))$ auszahlt mit $v(N, x)$ dessen arbitragefreien Anfangspreis. Seien u, d die möglichen Sprunghöhen im CRR Modell und ρ die periodische Zinsrate des Bankkontoprozesses.

- (a) Wieso ist der arbitragefreie Anfangspreis eindeutig bestimmt?
 (b) Zeigen Sie:

$$v(N, x) = \frac{1}{1 + \rho} (v(N-1, xu)p^* + v(N-1, xd)(1 - p^*))$$

$$\text{mit } p^* = \frac{1 + \rho - d}{u - d}$$

7. In einem arbitragefreien Mehrperioden Modell mit äquivalentem Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ sei H eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit integrierbarem abdiskontiertem Wertprozeß $(V_n^*(H))_{n=0, \dots, N}$. Es gilt also $\mathbb{E}^* V_n^*(H) < \infty$ für $n = 0, 1, \dots, N$.

Zeigen Sie, dass $(V_n^*(H))_{n=0, \dots, N}$ ein Martingal ist bezüglich $\mathbb{P}^*$.

8. Formulieren Sie den zweiten Fundamentalsatz der Preistheorie.

9. Zeigen Sie die diskrete Black-Scholes Formel, die in einem arbitragefreien CRR Modell über N Perioden mit Anfangspreis $A(0)$, Zinsrate ρ und Sprunghöhen d, u den Anfangspreis $p_0(C)$ eines Calls mit Basis K und Fälligkeit in N Perioden liefert:

$$p_0(C) = A(0) \text{Bin}(N, q)((b, \infty)) - K(1 + \rho)^{-N} \text{Bin}(N, p^*)((b, \infty))$$

mit

$$p^* = \frac{1 + \rho - d}{u - d}, \quad q = p^* \frac{u}{1 + \rho}, \quad b = \frac{\log \frac{K}{A(0)} - N \log d}{\log u - \log d}.$$

10. Wir betrachten ein Black-Scholes Modell, in dem bezüglich eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ der Aktienpreisprozeß durch einen geometrischen Wiener-Prozeß mit Drift μ , Volatilität σ und Anfangskurs x gegeben ist. Ferner verzinst sich ein Kapital auf dem Bankkonto stetig mit einer Rate r .

Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ für dieses Modell und zeigen Sie, wie Sie $\mathbb{P}^*$ aus $\mathbb{P}$ durch eine Maßtransformation erhalten können.