Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2014/15

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 9** **09.12.2014**

Aufgabe 1: Einperioden Triominalmodell 4 Punkte

Wir betrachten ein Trinomialmodell über eine Periode mit Zinsrate $\rho > -1$ für das Geldmarktkonto, in der eine Aktie mit Anfangspreis $S(0)$ die möglichen Endzustände $dS(0), mS(0), uS(0)$ annehmen kann. Es gelte $d < m < u$. Geben Sie an, wann dieses Modell arbitragefrei ist.

Bestimmen Sie für den Fall: $S(0) = 5, \rho = \frac{1}{9}, d = \frac{30}{9}, m = \frac{40}{9}, u = \frac{60}{9}$ die Menge der äquivalenten Martingalmaße.

Aufgabe 2: Das verallgemeinerte CRR Modell 4 Punkte

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter stochastischer Prozeß mit folgenden Eigenschaften:

1. $Z_0 = 0$ $\mathbb{P}$- fast sicher
2. Z ist eine zeitlich inhomogene Markov-Kette bezüglich $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit
$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k+1 | Z_n = k) = p(k,n) = 1 - \mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = k)$$
für alle $n \in \mathbb{N}_0, k = 0, \cdots, n$.

Die Zufallsvariable Z_n zählt die Anzahl der Aufwärtssprünge in den ersten n Perioden. Mit deren Hilfe wird wie im CRR Modell eine Preisentwicklung eines risikobehafteten Finanzgutes, etwa Aktie, modelliert durch

$$S_n = S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n}, n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $0 < d < u$ die zwei möglichen periodischen Steigerungsraten des Aktienpreisprozesses definieren.

Weiter sei eine Funktion $r : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to (0, \infty)$ gegeben mit dessen Hilfe die zufällige Zinsrate in der n- ten Periode definiert sei durch

$$\rho(n) = r(n, Z_{n-1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen voraus, dass $d < 1+r(n,k) < u$ für alle $n \in \mathbb{N}, k = 0, \cdots, n$ gilt. Als Finanzmarktmodell wird der Aktienpreisprozeß und der durch die Zinsraten definierte Geldmarktkonto-Prozeß über N Perioden betrachtet.

1. Wann liegt ein CRR Modell vor?

2. Wann ist $\mathbb{P}$ ein äquivalentes Martingalmaß?

3. Geben Sie eine Dichte L an, mit deren Hilfe man einen Maßwechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß durchführen kann.

Aufgabe 3: Zwei Aktien und ein Geldmarktkonto 4 Punkte

Gegeben seien iid Zufallsvariablen $X_1, \cdots, X_N$ jeweils mit Werten in $\{1, 2, 3\}$ Definiere die Prozesse Z_1, Z_2, Z_3 durch

$$Z_j(n) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_n = j\}}$$

für alle $n = 0, 1, \cdots N$ und $j = 1, 2, 3$. Zu Sprunghöhen u, d_1, d_2 und Anfangskursen $S_1(0), S_2(0)$definiere die Aktienpreisprozesse S_1, S_2 durch

$$S_1(n) = S_1(0) u^{Z_1(n)+Z_3(n)} d_1^{Z_2(n)} \quad , \quad S_2(n) = S_2(0) u^{Z_1(n)} d_2^{Z_2(n)+Z_3(n)}$$

für alle $n = 0, \cdots, N$

Weiter sei ein Bankkonto in diesem Markt mit periodischer Zinsrate $\rho > -1$, was also einer Preisentwicklung der Form $\beta(n) = (1 + \rho)^n, n = 0, \cdots, N$ entspricht.

Bestimmen Sie, wenn möglich, ein äquivalentes Martingalmaß und dessen P-Dichte. Ist dies gegebenenfalls eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4: CRR Modell revisited 4 Punkte

Gegeben sei ein arbitragefreies CRR Modell mit Aktienpreisprozeß

$$S(n) = S_0 u^{Z(n)} d^{n-Z(n)}$$

und Geldmarktkontoentwicklung der Form

$$\beta(n) = (1 + \rho)^n$$

für $n = 0, 1, \cdots, N$.

Wir wählen die Aktie als Numeraire Asset und nennen ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{\mathbb{P}}$ Aktienmartingalmaß, wenn $\bar{\mathbb{P}}$ äquivalent ist zu $\mathbb{P}$ und $\bar{\beta} = \beta/S$ ein Martingal ist bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$. Bestimmen Sie das Aktienmartingalmaß und die Radon-Nikodym Dichte von $\bar{\mathbb{P}}$ bezüglich $\mathbb{P}$.

Abgabe: bis spätestens Die 16.12.2014 11.00 Uhr im Fach Nr. 143 (Torres) bzw. 144 (Borrink)