

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2014/15

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 8

02.12.2014

Aufgabe 1: Mehrperioden Modell für zwei Aktien

4 Punkte

Sei $Z(n) = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 0, 1, \dots, N$ ein Random Walk mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Definiere zu Sprunghöhen $0 < d_1 < u_1, 0 < d_2 < u_2$ und Anfangskursen $S_1(0), S_2(0)$ die Aktienpreisprozesse S_1, S_2 durch

$$S_j(n) = S_j(0)u_j^{Z(n)}d_j^{n-Z(n)}$$

für alle $n = 0, \dots, N$, $j = 1, 2$.

Wann ist dieses Finanzmarktmodell arbitragfrei?

Aufgabe 2:

4 Punkte

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen in einem Finanzmarktmodell über N Perioden bei d risikobehafteten Finanzgütern mit Preisprozeß $S = (S_1, \dots, S_d)$.

1. Es gibt eine Arbitragemöglichkeit
2. Es gibt eine Periode n und einen $\mathfrak{F}_{n-1}$ meßbaren d -dimensionalen Zufallsvektor K derart, dass $\langle K, \Delta S^*(n) \rangle \geq 0$ und $\mathbb{P}(\langle K, \Delta S^*(n) \rangle > 0) > 0$.

Die zweite Aussage besagt, dass durch Handeln in der n -ten Periode ein sicherer Gewinn möglich ist.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Wann ist das verallgemeinerte CRR-Modell der Vorlesung arbitragefrei?

Aufgabe 4: Zwei Aktien und ein Geldmarktkonto

4 Punkte

Gegeben seien iid Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N$ jeweils mit Werten in $\{1, 2, 3\}$ Definiere die Prozesse Z_1, Z_2, Z_3 durch

$$Z_j(n) = \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i=j\}}$$

für alle $n = 0, 1, \dots, N$ und $j = 1, 2, 3$. Zu Sprunghöhen u, d_1, d_2 und Anfangskursen $S_1(0), S_2(0)$ definiere die Aktienpreisprozesse S_1, S_2 durch

$$S_1(n) = S_1(0)u^{Z_1(n)+Z_3(n)}d_1^{Z_2(n)}, \quad S_2(n) = S_2(0)u^{Z_1(n)}d_2^{Z_2(n)+Z_3(n)}$$

für alle $n = 0, \dots, N$

Weiter sei ein Bankkonto in diesem Markt mit periodischer Zinsrate $\rho > -1$, was also einer Preisentwicklung der Form $\beta(n) = (1 + \rho)^n, n = 0, \dots, N$ entspricht.

Wann ist dieses Modell arbitragefrei?

Abgabe: bis spätestens Die 09.12.2014 11.00 Uhr im Fach Nr. 143 (Torres) bzw. 144 (Borrink)