

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2014/15

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 6

18.11.2014

Aufgabe 1:

4 Punkte

Seien X_1, X_2 unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von $X_1 + X_2$ gegeben X_1 , sowie die bedingte Verteilung von X_1 gegeben $X_1 + X_2$.

Aufgabe 2:

4 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die jeweils auf $[0, 1]$ gleichverteilt seien. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X_1 gegeben M , wobei $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ den maximalen Wert der n Zufallsvariablen bezeichnet.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Seien $\mathbb{P}_{\theta_0}, \mathbb{P}_{\theta_1}$ Wahrscheinlichkeitsmaße, so dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ startend aus 0 bezeichnet mit $\mathbb{P}_{\theta_i}(S_1 = 1) = \theta_i = 1 - \mathbb{P}_{\theta_i}(S_1 = -1)$, $i = 1, 2$. Sei $\mathfrak{F}_n = \sigma\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ die durch S erzeugte Filtration und L_n die Radon Nikodym Dichte von $\mathbb{P}_{\theta_1}$ bezüglich $\mathbb{P}_{\theta_0}$ auf $\mathfrak{F}_n$. Also gilt

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(A) = \int_A L_n d\mathbb{P}_{\theta_0}$$

für alle $A \in \mathfrak{F}_n$. Zeigen Sie

(i) $(L_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Martingal bezüglich $\mathbb{P}_{\theta_0}$.

(ii) Für die Stopzeit

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : L_n \geq b\}$$

gilt

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(\tau < \infty) = 1 \quad , \quad \mathbb{P}_{\theta_0}(\tau < \infty) \leq \frac{1}{b}$$

Was für eine Struktur hat der Dichtequotientenprozeß (L_n) .

Aufgabe 4:

4 Punkte

Sei $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(Y_i = 2^i - 1) = \frac{1}{2^i} = 1 - \mathbb{P}(Y_i = -1)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Definiere den Prozeß $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

1. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definiert ein Martingal,
2. S_n konvergiert gegen $-\infty$ $\mathbb{P}$ -fast sicher.

Abgabe: bis spätestens Dienstag den 25.11.2014 um 11.00 Uhr in Fach 143 (Torres) / 144 (Borrink)