

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2014/15

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 5

11.11.2014

Aufgabe 1:

4 Punkte

Sei (X, Y) ein Paar von Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} K(x^2y^3 + xy), & 0 \leq x, y \leq 1; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie den Wert der Konstanten K .
2. Bestimmen Sie die Verteilung von Y .
3. Bestimmen Sie die bedingte Dichte von X gegeben $Y = y$ für $0 < y < 1$.
4. Bestimmen Sie den bedingten Erwartungswert von X gegeben $Y = y$ für $0 < y < 1$.
5. Berechnen sie $\mathbb{E}X$.
6. Berechnen Sie $\mathbb{P}(X < Y)$.

Aufgabe 2:

4 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die jeweils auf $\{1, \dots, N\}$ Laplaceverteilt sind. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X_1 gegeben M , wobei $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ den maximalen Wert der n Zufallsvariablen bezeichnet.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Für eine Permutation π der Menge $\{1, \dots, n\}$ definieren wir die Transformation, die die Koordinaten eines n -dimensionalen Vektors permutiert durch

$$T_\pi(x) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen eine Borelsche Teilmenge B des $\mathbb{R}^n$ permutationsinvariant, wenn $1_B \circ T_\pi = 1_B$ gilt für alle Permutationen π und bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ die Menge aller permutationsinvarianten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Eine meßbare Funktion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt symmetrisch, wenn $h \circ T_\pi = h$ für alle Permutationen π gilt. Eine Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)$ heißt austauschbar, wenn die Verteilung von $T_\pi \circ X$ invariant bleibt unter allen Permutationen π .

Zeigen Sie

- $\mathfrak{S}$ ist eine σ -Algebra,
- Eine Borelmeßbare Funktion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist meßbar bezüglich $\mathfrak{S}$ genau dann, wenn h symmetrisch ist.

- Bestimmen Sie $\mathbb{E}(g(X)|X^{-1}(\mathfrak{S}))$ für jede quasi-integrierbare Zufallsvariable $g(X)$ unter der Voraussetzung der Austauschbarkeit von X .
- Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X_1|X^{-1}(\mathfrak{S})), \mathbb{E}(X_1X_2|X^{-1}(\mathfrak{S}))$, wenn X austauschbar und X_1 bzw. X_1X_2 quasi-integrierbar sind.

Aufgabe 4: Hinterbliebenenrente

4 Punkte

Ein Ehepaar mit Eintrittsalter x und y schließt eine Sofortrente ab, die bis zum ersten Tod eine Rente der Höhe R jährlich vorschüssig zahlt. Mit dem ersten Todesfall wird die Rentenhöhe auf $0.7R$ gesenkt und bis zum zweiten Todesfall ausgezahlt.

1. Modellieren Sie diese Versicherung.
2. Bestimmen Sie eine Formel für den Barwert der Leistungen.
3. Benutzen Sie die Sterbetafel zur Berechnung des Barwertes für den Fall $x = 65, y = 60$ und $R = 1$.

Abgabe: bis spätestens Dienstag den 18.11.2014 um 11.00 Uhr in Fach 143 (Torres) / 144 (Borrink)