

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2014/15

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 13

20.01.2015

Hier einige frühere Klausuraufgaben zum Üben.

Aufgabe 1:

Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal und τ eine beschränkte Stoppzeit. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0.$$

Aufgabe 3:

Formulieren Sie das N -Perioden CRR Modell und geben Sie mit Beweis eine Bedingung an, wann dies arbitragefrei ist.

Aufgabe 4:

In einem arbitragefreien CRR Modell über N Perioden mit Anfangspreis x bezeichne für einen Claim, der am Ende der N -ten Periode $h(S_N)$ auszahlt mit $v(N, x)$ dessen arbitragefreien Anfangspreis. Seien u, d die möglichen Sprunghöhen im CRR Modell und ρ die periodische Zinsrate des Bankkontoprozesses.

1. Wieso ist der arbitragefreie Anfangspreis eindeutig bestimmt?
2. Zeigen Sie:

$$v(N, x) = \frac{1}{1 + \rho} (v(N - 1, xu)p^* + v(N - 1, xd)(1 - p^*))$$

$$\text{mit } p^* = \frac{1 + \rho - d}{u - d}$$

3. Formulieren Sie einen Algorithmus, der den arbitragefreien Anfangspreis berechnet.

Aufgabe 5:

Wir betrachten einen Finanzmarkt bestehend aus einem Bond und zwei Aktien über eine Periode. Der Bond ist durch den Anfangspreis 1 und die periodische Zinsrate $\rho > -1$ festgelegt. Die erste Aktie hat einen Anfangspreis A_0 und einen zufälligen Endpreis A_1 gegeben durch

$$A_1(\omega) = \begin{cases} u_1 A_0, & \text{falls } \omega = \omega_1 ; \\ d_1 A_0, & \text{falls } \omega = \omega_2 ; \\ u_1 A_0, & \text{falls } \omega = \omega_3. \end{cases}$$

mit $0 < d_1 < u_1$. Die zweite Aktie hat einen Anfangspreis S_0 und einen zufälligen Endpreis S_1 gegeben durch

$$S_1(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} u_2 S_0, & \text{falls } \omega = \omega_1 ; \\ d_2 A_0, & \text{falls } \omega = \omega_2 ; \\ d_2 A_0, & \text{falls } \omega = \omega_3. \end{array} \right\}$$

mit $0 < d_2 < u_2$. Ferner gelte $A_0 = S_0$ und $d_1 \leq d_2 < 1 + \rho < u_1 \leq u_2$.

1. Bestimmen Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße.
2. Ist das Modell vollständig?
3. Die Exchange-Option ist definiert durch die Auszahlung $C = (S_1 - A_1)^+$. Bestimmen Sie eine Handelsstrategie, die C repliziert.
4. Geben Sie eine Formel für den Anfangspreis von C an.

Aufgabe 6:

Geben Sie ein arbitragfreies N -Perioden Trinomial Modell an. Was können Sie über die Bewertung einer Calloption in ihrem Modell aussagen?

Aufgabe 7:

Formulieren Sie den 1. Fundamentalsatz der Preistheorie und beweisen Sie diesen für den Fall, dass der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum endlich ist.

Aufgabe 8:

1. Was sind die Bestandteile eines Black-Scholes Modells mit Laufzeit T .
2. Wie erhält man ein äquivalentes Martingalmaß?
3. Leiten Sie eine Black-Scholes Formel für den Anfangspreis eines Puts mit Laufzeit T und Basis K her.