

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2014/15

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 12

13.01.2015

Aufgabe 1:

4 Punkte

Zeigen Sie, dass in einem CRR Modell der Zählprozeß der Aufwärtssprünge $(Z(n))_{n=0,\dots,N}$ bezüglich $\mathbb{P}_1^*$ ein Random Walk definiert mit $\mathbb{P}_1^*(Z(1) = 1) = \frac{p^*u}{1+\rho}$, wobei $p^* = \frac{1+\rho-d}{u-d}$ und P_1^* durch den Dichteprozess $\frac{S^*(n)}{S(0)}$, $n = 0, \dots, N$ bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ definiert ist.

Aufgabe 2:

Wir betrachten ein Trinomialmodell über N Perioden und ein Claim mit Auszahlung der Form $C = g(S(N))$ nach N Perioden, wobei S den Preisprozeß des risky assets bezeichnet. Überlegen Sie sich, wie man numerisch den upper und lower hedging Preis durch Betrachtung von Martingalmaßen ausrechnen kann. Beschreiben Sie den dazugehörigen Algorithmus.

Aufgabe 3:

Betrachtet werde ein arbitragefreies N -Perioden Modell mit risikoneutralem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$, Informationsverlauf $(\mathfrak{F}_n)_{n=0,\dots,N}$, bestehend aus einem Bankkonto mit deterministischem periodischen Zinssatz $\rho > 0$ und einer Aktie mit Preisprozess $(S_n)_{n=0,\dots,N}$.

Eine Bank möchte eine sogenannte Chooseroption verkaufen. Diese Option gibt dem Käufer das Recht, zum Zeitpunkt $n_c < N$ zwischen einem Call mit Ausübungszeitpunkt N und Basis K und einem Put mit gleicher Basis und gleichem Ausübungszeitpunkt zu wählen.

Bezeichne wir mit

$$C_n = (1 + \rho)^{n-N} \mathbb{E}^*((S_N - K)^+ | \mathfrak{F}_n), \quad P_n = (1 + \rho)^{n-N} \mathbb{E}^*((K - S_N)^+ | \mathfrak{F}_n)$$

den Preis von Call bzw. Put zum Zeitpunkt n , so entspricht der Chooseroption der Claim

$$C = (S_N - K)^+ 1_{\{C_{n_c} \geq P_{n_c}\}} + (K - S_N)^+ 1_{\{C_{n_c} < P_{n_c}\}}.$$

1. Begründen Sie, warum die Wahlmöglichkeit zum Zeitpunkt n_c entsprechend der des Claims durchgeführt werden sollte.
2. Zeigen Sie, dass in einem Cox Ross Rubinstein Modell der Anfangspreis der Chooseroption durch

$$c(S_0, N, K) + p(S_0, n_c, K(1 + \rho)^{n_c-N})$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnen $c(x, t, K)$ und $p(x, t, K)$ den Preis eines Calls bzw. Puts mit Restlaufzeit t zum Basispreis K bei gegebenem Aktienkurs x .

Aufgabe 4: Allgemeine Bewertungsformel für eine Exchange Option

4 Punkte

Wir betrachten einen arbitragefreien Finanzmarkt mit zwei risky assets S_1, S_2 und einem numeraire asset S_0 über N Perioden und nehmen an, dass die Exchange Option, die eine Auszahlung von $C = (S_2(N) - S_1(N))^+$ nach N Perioden verspricht, hedgebar ist. Zeigen Sie, dass es Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1^*$ und $\mathbb{P}_2^*$ gibt, so dass der Anfangspreis $p(C)$ der Exchangeoption die Gleichung

$$p(C) = S_2(0)\mathbb{P}_2^*(S_2(N) > S_1(N)) - S_1(0)\mathbb{P}_1^*(S_2(N) < S_1(N))$$

erfüllt.

Wie können Sie dies benutzen, um im Modell von Aufgabe 2 Blatt 11 einen Preis für die Exchange Option explizit zu bestimmen.

Abgabe: bis spätestens Die 20.01.2015 11.00 Uhr im Fach Nr. 143 (Torres) bzw. 144 (Borriink)