Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 13** **20.01.2014**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei U ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}_2$, der invariant ist unter Stoppen. Dies bedeutet, dass für jedes $M \in U$ und jede Stoppzeit τ der gestoppte Prozess M^τ wieder in U enthalten ist. Zeigen Sie, daß das orthogonale Komplement V von U auch invariant ist unter Stoppen. Dabei heißen zwei Martingale $M, N \in \mathcal{H}_2$ senkrecht zueinander, falls $\mathbb{E}M_\infty N_\infty = 0$ gilt.

Zeigen Sie weiter, dass im obigen Falle U, V auch stark komplementär sind. Dies bedeutet, dass für Martingale $M \in U$ und $N \in V$ die quadratische Kovariation $< M, N >= 0$ ist.

Wieso ist das Bild des stochastischen Integralprozessoperators

$$\{H \cdot M : H \in L_2(\mu_M)\}$$

invariant unter Stoppen?

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien μ und σ previsible Prozesse mit $\int_0^t |\mu(s)|ds < \infty$ und $\int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Seien W ein Wiener-Prozess und S eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

mit Anfangswert ζ. Sei weiter Z eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ(t) = Z(t)(\mu(t)dt + |\sigma(t)|dW(t))$$

mit gleichem Anfangswert ζ.

Zeigen Sie, dass S und Z die gleiche Verteilung haben.

Aufgabe 3: 4 Punkte

1. **quadrierter Besselprozess**

   Sei W ein n- dimensionaler Wiener-Prozess. Für $a \neq 0$ setzen wir $X(t) = a + W(t)$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Wiener-Prozess B gibt, so dass $Y(t) = |X(t)|^2$ die stochastische Differentialgleichung

   $$dY(t) = 2\sqrt{Y(t)}dB(t) + ndt$$

   mit Anfangswert $|a|^2$ erfüllt.

   Y heißt quadrierter Besselprozess der Dimension n.

2. **quadrierter Ornstein-Uhlenbeck Prozess**

   Sei X ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess und damit Lösung der Gleichung
   $$dX(t) = -X(t)dt + dW(t)$$
   zu einem Startwert $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Wienerprozess B gibt, so dass $Y(t) = X(t)^2$ die Gleichung
   $$dY(t) = (1 - 2Y(t))dt + 2\sqrt{|Y(t)|}dB(t)$$
   zum Anfangswert a^2 löst.

   Y heißt quadrierter Ornstein-Uhlenbeck Prozess der Dimension 1.

Aufgabe 4: 4 Punkte

1. Seien B_1, B_2 unabhängige eindimensionale Wiener-Prozesse und ρ ein previsibler Prozess mit Werten in $[-1, 1]$. Zeigen Sie, dass es dann eindimensionale Wiener-Prozesse W_1, W_2 gibt mit quadratischem Kovariationsprozess
   $$< W_1, W_2 >_t = \int_0^t \rho(s)ds$$
   für alle $t \geq 0$.

2. Sind umgekehrt W_1, W_2 eindimensionale Wiener-Prozesse mit quadratischem Kovariationsprozess
   $$< W_1, W_2 >_t = \int_0^t \rho(s)ds$$
   für alle $t \geq 0$, so überlegen Sie sich, dass es unabhängige Wiener-Prozesse B_1, B_2 gibt, so dass W aus B entsprechend dem ersten Teil der Aufgabe konstruiert werden kann. Hierbei müssen Sie allerdings voraussetzen, dass ρ nur Werte in $(-1, 1)$ annehmen kann und dass
   $$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - \rho(s)^2}} ds < \infty$$
   für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher gilt.

Aufgabe 5: freiwillige Extraaufgabe 4 Punkte

Sei X ein reelles stetiges Semimartingal und F eine streng monoton wachsende C^1-Funktion. Definiere das laufende Maximum durch $\hat{X}_t = \max_{0 \leq s \leq t} X_s$ für alle $t \geq 0$. Das Azéma-Yor Semimartingals M^F ist dann definiert durch
$$M^F(t) = F(\hat{X}_t) - F'(\hat{X}_t)(\hat{X}_t - X_t).$$
Zeigen Sie die folgende Integraldarstellung von M^F
$$M^F(t) = F(X_0) + \int_0^t F'(\hat{X}_s)dX_s.$$
für alle $t \geq 0$.

Abgabe: Die. 28.01.2014 bis spätestens 12.00 im Fach 135