Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 12** **13.01.2014**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei L ein lokales Martingal. Zeigen Sie.

1. Ist für jedes $T > 0$ die Familie
$$\{L_\tau : \tau \text{ Stoppzeit mit } \tau \leq T\}$$
gleichgradig integrierbar, so ist L ein Martingal.

2. Ist die Familie
$$\{L_\tau : \tau \text{ beschränkte Stoppzeit }\}$$
gleichgradig integrierbar, so ist L ein gleichgradig integrierbares Martingal.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien M, Z stetige Semimartingale und X eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = dM_t + X_t dY_t$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = M_0$.

Zeigen Sie, dass X gegeben ist durch

$$X_t = \mathfrak{E}(Y)_t \left(M_0 + \int_0^t \frac{1}{\mathfrak{E}(Y)_s} dM_s - \int_0^t \frac{1}{\mathfrak{E}(Y)_s} d\langle M, Y\rangle_s \right)$$

für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit normalverteilten Randverteilungen, i.e.

$$\mathbb{P}(X_t \in \cdot) = N(m(t), v(t))$$

für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie:

X_t strebt in Verteilung gegen eine $N(m_\infty, v_\infty)$ verteilte Zufallsvariable für $t \to \infty$ genau dann, wenn

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = m_\infty, \quad \lim_{t\to\infty} v(t) = v_\infty$$

gelten.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass eine Verteilungskonvergenz genau dann vorliegt, wenn die Fouriertransformierte punktweise konvergiert. Sie können aber auch direkt die Verteilungskonvergenz nachweisen, da die Dichten punktweise konvergieren.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Betrachte die lineare stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = (X_t\mu(t) + a(t))dt + \eta(t)dW(t), X_0 = \zeta$$

mit quadratintegrierbarer Anfangsvariablen X und deterministischen Koeffizientenfunktionen μ, a, η. Zeigen Sie, dass die Mittelwert- und Varianzfunktion der Lösung die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} m'(t) &= \mu(t)m(t) + a(t), \quad m(0) = \mathbb{E}\,\zeta \\ v'(t) &= 2\mu(t)v(t) + \eta^2(t), \quad v(0) = \operatorname{Var}\eta \end{aligned}$$

erfüllen. Hierbei ist $m(t) = \mathbb{E}X_t, v(t) = \mathrm{Var}X_t$ für alle $t \geq 0$.

Abgabe: Die. 21.01.2014 bis spätestens 12.00 im Fach 135