Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 11** **06.01.2014**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Zeigen Sie die folgende in der Vorlesung angegebene Version der Ito-Formel. Seien X ein stetiges Semimartingal und B ein adaptierter Prozess mit stetigen Pfaden von beschränkter Variation. Dann stimmt für jede $C^{1,2}$ Funktion f der Prozess $(f(B_t, X_t))_{t\geq 0}$ bis auf Nichtunterscheidbarkeit mit dem Integralprozess

$$f(B_0, X_0) + \int_0^{\cdot} \partial_b f(B_s, X_s) dB_s + \int_0^{\cdot} \partial_x f(B_s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^{\cdot} \partial_x^2 f(B_s, X_s) d < X >_s$$

überein.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien W_1 und W_2 Wiener-Prozesse mit $< W_1, W_2 >_t = \rho t$ für alle $t \geq 0$ für ein $\rho \in (-1, 1)$. Definiere die Semimartingale S_1, S_2 durch

$$S_1(t) = \exp(\sigma_1 W_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t), S_2(t) = \exp(\sigma_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t)$$

für alle $t \geq 0$. Bestimmen Sie eine stochastische Differentialgleichung, die $\frac{S_1}{S_2}$ erfüllt.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei X ein stetiges lokales Martingal mit $\mathbb{P}(X_t > 0 \text{ f.a. } t \geq 0) = 1$. Zeigen Sie, dass dann ein lokales Martingal M existiert mit

$$X_t = X_0 \exp(M_t - \frac{1}{2} < M >_t)$$

für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$- fast sicher.

Aufgabe 4: Hull-White Prozess 4 Punkte

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung.

$$dX_t = \theta(t)(\mu(t) - X(t))dt + \sigma(t)dW_t$$

mit Anfangsbedingung X_0.

Hierbei seien θ, μ, σ stetige Koeffizientenfunktionen mit $\sigma(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.

Abgabe: Die. 14.01.2014 bis spätestens 11.00 im Fach 135