Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 10** **17.12.2013**

Definition eines Integralprozesses auf einem Intervall $[0,T)$

Statt der Betrachtung auf dem Zeitintervall $[0,\infty)$ kann auch die stochastische Integrationstheorie für Martingale bzw. lokale Martingale durchgeführt werden, wenn diese nur auf einem Zeitintervall $[0,T)$ definiert sind. Salopp gesagt ist dazu ∞ überall durch T zu ersetzen. Beispielsweise ist ein stochastischer Prozess $(M_t)_{0\le t<T}$ dann ein lokales Martingal, wenn es eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\sup_{n\in\mathbb{N}}\tau_n = T$, so dass M^{τ_n} ein Martingal ist für alle $n\in\mathbb{N}$. Für ein $M\in\mathfrak{M}_{c,loc}$ und $H\in L^2_{loc}(M)$ kann dann der stochastische Integralprozess $((H\cdot M)_t)_{0\le t<T}$ in zur Vorlesung analoger Weise definiert werden.

Aufgabe 1: Brownsche Brücke 8 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess. Für einen Endzeitpunkt $T>0$ und einen Endpunkt $b\in\mathbb{R}$ soll ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t<T}$ angegeben werden, der sich verhält wie ein Wiener-Prozess W - gegeben $W(T)=b$. Definiere hierzu

$$X_t = b\frac{t}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s}dW_s$$

für alle $0\le t<T$.

Zeigen Sie

1. X ist ein Semimartingal,
2. $M_t = \int_0^t \frac{1}{T-s}dW_s, 0\le t<T$ ist ein L_2 Martingal aber kein $\mathcal{H}_2$ Martingal,
3. M hat unabhängige Zuwächse
4. $\mathbb{E}X_t = b\frac{t}{T}$, $\mathrm{Var}X_t = (T-t)^2(\frac{1}{T-t}-\frac{1}{T})$ für alle $0\le t<T$
5. $\mathrm{Cov}(X_s,X_t) = (s\wedge t) - \frac{st}{T}$ für alle $0\le s,t<T$,
6. Die Verteilung von $(X_{t_1},\cdots,X_{t_k})$ ist eine k-dimensionale Normalverteilung für k Zeitpunkte $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<T$.
7. X ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \frac{b-X_t}{T-t}dt + dW_t,$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = 0$, i.e.

$$X_t = \int_0^t \frac{b - X_s}{T - s} ds + W_t$$

für alle $0 \leq t < T$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozess. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion μ_n definiert durch $\mu_n(t) = \mathbb{E}W_t^{2n}$ für alle $t \geq 0$.

Hinweis: Benutzen Sie die Ito-Formel um eine Rekursionsgleichung für die μ_n, $n \in \mathbb{N}$ herzuleiten. Durch Ausrechnen der ersten Glieder kann dann die Formel erkannt werden, die man dann durch Induktion beweisen kann.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien μ und σ Funktionen von $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_0^t |\mu(s)| ds < \infty \quad , \quad \int_0^t \sigma^2(s) ds < \infty$$

für alle $t \geq 0$. Definiere den stochastischen Prozess $(S_t)_{t \geq 0}$ durch

$$S_t = \exp\left(\int_0^t \sigma(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right) \exp\left(\int_0^t \mu(s) ds \right).$$

1. Zeigen Sie, dass der Prozess S die stochastische Differentialgleichung

   $$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

   erfüllt.

2. Benutzen Sie die obige stochastische Differentialgleichung, um eine gewöhnliche Differentialgleichung für $f(t) = \mathbb{E}S(t)$ herzuleiten.

3. Lösen sie diese, um f explizit zu bestimmen.

4. Führen Sie die gleiche Prozedur durch zur Bestimmung von $\mathbb{E}S(t)^2$.

5. Berechnen Sie $\mathrm{Var}S(t)$.

Abgabe: Die. 07.01.2014 bis spätestens 12.00 im Fach 135