Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 09** **10.12.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass für $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ gilt

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M+N\rangle_s \leq 2\left(\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s + \int_0^t H_s^2 d\langle N\rangle_s\right)$$

für jeden previsiblen Prozess H und alle $t \geq 0$. Folgern Sie hieraus

$$L^2_{loc}(M) \cap L^2_{loc}(N) \subset L^2_{loc}(M+N).$$

Gilt eigentlich auch die Gleichheit?

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\langle H \cdot M, N\rangle = \int_0^{\cdot} H_s d\langle M, N\rangle_s$$

gilt. Damit folgt insbesondere

$$\langle H \cdot M, K \cdot N\rangle = \int_0^{\cdot} H_s K_s d\langle M, N\rangle_s$$

für alle $K \in L^2_{loc}(N)$.

Um zu zeigen, dass die rechten Seiten wohldefiniert sind, können Sie die Kunita-Watanabe Ungleichung benutzen. Diese besagt, dass für $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ und progressiv messbare Prozesse H, K gilt

$$\int_0^t |H_s||K_s| d\langle M, N\rangle_s \leq \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t K_s^2 d\langle N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Zeigen Sie die folgende partielle Integrationsformel für lokale Martingale.

Für $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ ist der stochastische Prozess $(M_t N_t)_{t \geq 0}$ nicht unterscheidbar von

$$M_0 N_0 + (M \cdot N) + (N \cdot M) + \langle M, N\rangle.$$

Wieso sind die stochastischen Integralprozesse wohldefiniert?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Formel für $M = N$ durch geeignete Lokalisation und führen Sie dann eine Polarisation durch.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Zeigen Sie die folgende Formel für den Wiener-Prozess W.

$$W_t^3 = tW_t + 3\int_0^t W_s^2 dW_s - \int_0^t s dW_s + 2\int_0^t W_s ds$$

für alle $t \geq 0$.

Abgabe: Die. 17.12.2013 bis spätestens 12.00 im Fach 135

Besprechung: Mittwoch den 18.12.2013. 12.00-14.00 SR2