

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 08

03.12.2013

Aufgabe 1:

4 Punkte

Seien M, N stetige L_2 -Martingale und Π_n , $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegungsfolge $0 = t_0^n < t_1^n < \dots$ mit $\sup_i t_i^n = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|\pi_n| = \sup_i t_i^n - t_{i-1}^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Zeigen Sie, dass die quadratische Kovariation der Pfade von M, N entlang des Gitters gegen den quadratischen Kovariationsprozess in Wahrscheinlichkeit konvergiert. Für

$$KV_n(t) = \sum_i (M(t_i^n \wedge t) - M(t_{i-1}^n \wedge t))(N(t_i^n \wedge t) - N(t_{i-1}^n \wedge t))$$

ist also zu zeigen, dass für alle $T > 0$

$$\sup_{t \leq T} |KV_n(t) - \langle M, N \rangle_t| \rightarrow 0$$

in Wahrscheinlichkeit für $n \rightarrow \infty$

Aufgabe 2:

2 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess. Zeigen Sie, dass es ein $H \in L_2(\mu_W)$ gibt mit $H \notin lb\mathcal{P}$.

Aufgabe 3:

6 Punkte

1. Zeigen Sie, dass jedes nichtnegative lokale Martingal ein Supermartingal ist.
2. Zeigen Sie, dass jedes beschränkte lokale Martingal ein beschränktes Martingal ist, dass also

$$b(\mathfrak{M}_{loc}) \subset b\mathfrak{M}$$

gilt.

3. Geben Sie ein lokal beschränktes Martingal an, dass nicht beschränkt ist. Damit ist also $b(\mathfrak{M}_{loc})$ echt in $(b\mathfrak{M})_{loc}$ enthalten.

Aufgabe 4:

2 Punkte

Bezeichne mit

$$\mathfrak{M}_{c,loc} = \{M \in \mathfrak{M}_{loc} : M \text{ hat fast sicher stetige Pfade}\}$$

und mit

$$b\mathfrak{M}_{c,loc} = \{M \in (b\mathfrak{M})_{loc} : M \text{ hat fast sicher stetige Pfade}\}$$

Zeigen Sie

1. $\mathfrak{M}_{c,loc} = (\mathfrak{M}_c)_{loc}$
2. $b\mathfrak{M}_{c,loc} = (b\mathfrak{M}_c)_{loc}$

Aufgabe 5:

2 Punkte

Sei $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten mit $\sup_n \tau_n = \infty$ und so, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Prozess M^{τ_n} nicht unterscheidbar ist von N^{τ_n} . Zeigen Sie, dass dann auch der Prozess M nicht unterscheidbar ist von N .

Abgabe: Die. 10.12.2013 bis spätestens 12.00 im Fach 135

Besprechung: Mittwoch den 11.12.2013. 12.00-14.00 SR2