Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 07** **25.11.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess und $H \in b\mathcal{P}$ definiert durch

$$H = 1_{(0,\tau_a]} + 1_{(\tau_b,\infty)}.$$

Hierbei definieren τ_a, τ_b die Erstbesuchszeit in a bzw. b für $0 < a < b$, also

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}.$$

Bestimmen Sie $H \cdot W$ und $< H \cdot W >$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei W ein Wienerprozess und $M_t = W_t^2 - t$ gesetzt für $t \geq 0$.

1. Was ist die quadratische Variation von M?

   Benutzen Sie dies zur Berechnung von $\mathbb{E}W_t^4$.

2. Was ist die quadratische Kovariation von M und W.

Aufgabe 3: 2 Punkte

Zeigen Sie die folgende Aussage. Ist M ein stetiges L_2-Martingal mit unabhängigen Zuwächsen, so ist $< M >$ deterministisch.

Geben Sie Beispiele für Martingale mit unabhängigen Zuwächsen.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei M ein stetiges L_2-Martingal mit $M1_{(0,t]} \in L_2(\mu_M)$ für alle $t > 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$M_t^2 - M_0^2 = 2\int 1_{(0,t]} M_s dM_s + < M >_t$$

für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher gilt.

Aufgabe 5: 2 Punkte

Zeigen Sie, dass die quadratische Kovariation verträglich ist mit Stoppen. Es gilt also

$$< M, N >^\tau = < M^\tau, N > = < M, N^\tau > = < M^\tau, N^\tau >$$

für alle stetigen L_2-Martingale M, N und jede Stoppzeit τ.

Abgabe: Die. 03.12.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135

Besprechung: Mittwoch den 04.12.2013, 12.00-14.00 SR2