Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 06** **18.11.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei M ein L_2-Martingal und τ eine beliebige Stoppzeit. Zeigen Sie:

1. $\mu_{M^\tau} \leq \mu_M$,
2. $L_2(\mu_M) \subset L_2(\mu_{M^\tau})$,
3. Ist H previsibel, so auch H^τ,
4. Ist $H \in L_2(\mu_M)$, so gilt $(H \cdot M)^\tau = (H^\tau \cdot M^\tau)$,
5. Sind H ein beschränkter previsibler Prozess und $M \in H_2$, so gilt

$$H^\tau \cdot M = H 1_{(0,\tau]} \cdot M + H_\tau (M - M^\tau).$$

Aufgabe 2: 2 Punkte

Sei M ein L_2-Martingal mit stetigen Pfaden und $H \in L_2(\mu_M)$. Zeigen Sie, dass der stochastische Integralprozess $H \cdot M$ in $\mathcal{H}_{2,c}$ enthalten ist.

Aufgabe 3: 2 Punkte

Sei Y eine $\mathfrak{F}_0$ messbare Zufallsvariable mit $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Definiere das konstante Martingal M durch $M_t = Y$ für alle $t \geq 0$.

1. Ist $M \in \mathcal{H}_{2,c}$? Ist $M \in b\mathfrak{M}_c$?
2. Was ist μ_M? Was ist $L_2(\mu_M)$?
3. Was ist $\int H dM$ für alle $H \in L_2(\mu_M)$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Geben Sie ein beschränktes Martingal an, dessen quadratischer Variationsprozess unbeschränkt ist.

Aufgabe 5: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass der quadratische Variationsprozess die folgenden Eigenschaften besitzt.

1. $< cM >= c^2 < M >$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle stetigen L_2 Martingale M.
2. $< M + N > + < M - N >= 2(< M > + < N >)$
   für alle stetigen L_2 Martingale M, N.

Folgern Sie hieraus, dass durch

$$< M, N >= \frac{1}{4}(< M + N > - < M - N >)$$

für alle stetigen L_2 Martingale M, N eine bilineare Abbildung definiert wird.

Abgabe: Die. 26.11.2013 bis spätestens 12.00 im Fach 135

Besprechung: Mittwoch den 27.11.2013. 12.00-14.00 SR2