Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 05** **11.11.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Für eine bezüglich des Lebesgue-Maßes quadratintegrierbare Funktion f definieren wir $H(t,\omega) = f(t)$ für alle $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie:

1. H ist previsibel,
2. Bestimmen sie $\mathbb{E}I(H)$, $\mathrm{Var}I(H)$ mit $I(H) = \int H\,dW$,
3. $I(H)$ ist eine normalverteilte Zufallsvariable,
4. $H \cdot W$ hat unabhängige Zuwächse.

Aufgabe 2: Zeittransformierter Wiener-Prozess 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ und $\eta : [0,\infty) \to [0,T)$ eine monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion mit $\eta(0) = 0$. Definiere den stochastischen Prozess $(M_t)_{t\geq 0}$ durch

$$M_t = W(\eta(t))$$

und die Filtration $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{F}_{\eta(t)}$ für alle $t \geq 0$.

1. Zeigen Sie, dass M ein L_2-Martingal mit cádlág Pfaden ist.
2. Bestimmen Sie das zu M gehörige Doleansmaß.
3. Bestimmen Sie $L_2(\mu_M)$ für den Fall, dass η streng monoton wachsend und differenzierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass für $H \in L_2(\mu_M)$ der Prozess K definiert durch $K(t) = H(\eta^{-1}(t))1_{[0,T)}(t)$ in $L_2(\mu_W)$ enthalten ist und

$$\int H(s)dM_s = \int K(t)dW(t)$$

   gilt.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien M ein L_2-Martingal mit cádlág Pfaden und σ, τ $\mathbb{P}$ Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$ und $\mu_M((0,\tau]) < \infty$. Dann sind wegen Aufgabe 1 Blatt 4 M^τ und M^σ Martingale in $\mathcal{H}_2$, weshalb M_τ durch $(M^\tau)_\infty$ und M_σ durch $(M^\sigma)_\infty$ definiert werden kann. Zeigen Sie

1.
$$\int Y 1_{(\sigma,\tau]} dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$
für jede beschränkte $\mathfrak{F}_\sigma$-messbare Zufallsvariable Y,

2.
$$(Y 1_{(\sigma,\tau]}) \cdot M = Y(M^\tau - M^\sigma)$$
für jede beschränkte $\mathfrak{F}_\sigma$-messbare Zufallsvariable Y.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei M ein L_2-Martingal und $K \in L_2(\mu_M)$. Zeigen Sie die in der Vorlesung benutzte Identität

$$H \cdot (K \cdot M) = (HK) \cdot M$$

für alle $H \in \mathfrak{E}$.

Abgabe: Die. 19.11.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135

Besprechung: Mittwoch 20.11.2013. 12.00-14.00 SR2