Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 04** **04.11.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag Pfaden und $M_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Zeigen Sie

1. Für jede beschränkte Stoppzeit τ gilt
$$\mu_M((0,\tau]) = \mathbb{E}M_\tau^2.$$

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Stoppzeit und ein Martingal, wo obige Gleichung nicht erfüllt ist.

3. Für jede Stoppzeit τ mit $\mu_M((0,\tau])) < \infty$ ist der gestoppte Prozess M^τ ein $\mathcal{H}_2$-Martingal und damit gilt
$$\mu_M((0,\tau]) = \mathbb{E}M_\tau^2.$$

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien W ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ und τ eine beliebige $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ Stoppzeit. Zeigen Sie

1. $\mu_W((0,\tau]) = \mathbb{E}\,\tau$.

2. Ist $\mathbb{E}\,\tau < \infty$, so gilt $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\,\tau$.

3. Ist $(t_j^n)_{j=0..l(n)}$ eine Zerlegunsfolge des Intervalls $[0,T]$, deren Feinheit gegen 0 strebt, so gilt
$$\sum_{j=1}^{l(n)} (W_{t_j^n} - W_{t_{j-1}^n})^2 \to T$$
in $L_2(P)$.

4. Ist τ beschränkt, σ eine weitere Stoppzeit mit $\sigma \leq \tau$ und Y eine $\mathfrak{F}_\sigma$ messbare quadrat-integrierbare Zufallsvariable, so gilt
$$\int Y1_{(\sigma,\tau]}dW = Y(W_\tau - W_\sigma).$$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien M ein L_2-Martingal mit cadlag Pfaden und σ, τ $\mathbb{P}$-fast sichere endliche Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$ und $\mu_M((\sigma,\tau]) < \infty$. Zeigen Sie
$$\int Y1_{(\sigma,\tau]}dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

für jede beschränkte $\mathfrak{F}_\sigma$-messbare Zufallsvariable Y.

Ist M ein $\mathcal{H}_2$-Martingal und sind σ, τ beliebige Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$, so gilt

$$\int Y 1_{(\sigma,\tau]} dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

für jede beschränkte $\mathfrak{F}_\sigma$-messbare Zufallsvariable Y.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag Pfaden und τ eine beliebige Stoppzeit. Zeigen Sie, dass das Doléans-Maß des gestoppten Martingals M^τ gegeben ist durch

$$\mu_{M^\tau}(A) = \int_A 1_{(0,\tau]} d\mu_M = \mu_M(A \cap (0,\tau])$$

für alle $A \in \mathfrak{P}$.

Abgabe: Die. 12.11.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135

Besprechung: Mittwoch 13.11.2013. 12.00-14.00 SR2