Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 02** **22.10.2013**

Aufgabe 1: Optional Sampling Theorem für Submartingale 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein cadlag Submartingal bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie:

1. Ist τ eine Stoppzeit mit $\tau \leq T$ für ein $T > 0$, so gilt $X_\tau \leq \mathbb{E}(X_T|\mathfrak{F}_\tau)$. Insbesondere folgt damit $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_T$.
2. Ist X ein gleichgradig integrierbares Submartingal, so existiert eine integrierbare $\mathfrak{F}_\infty$ messbare Zufallsvariable X_∞ mit $X_t \leq \mathbb{E}(X_\infty|\mathfrak{F}_t)$ $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $t \geq 0$. Weiter gilt $X_\tau \leq \mathbb{E}(X_\infty|\mathfrak{F}_\tau)$ für jede Stoppzeit τ und damit insbesondere $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_\infty$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess. Betrachte für $a, b > 0$ die Stoppzeit

$$\tau_{ab} = \inf\{t \geq 0 : W_t = -a \text{ oder } \; W_t = b\}.$$

Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\, \tau_{ab} = ab.$$

Aufgabe 3: Doobsche Maximalidentität 4 Punkte

Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ Martingal mit stetigen Pfaden , das $M_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$ und $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher erfüllt. Zeigen Sie, dass dann für alle $a > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t \geq a|\mathfrak{F}_0) = 1_{\{M_0\geq a\}} + \frac{M_0}{a} 1_{\{M_0<a\}}.$$

Zeigen Sie weiter

1. $\mathbb{P}(\sup_{t\geq T} M_t < a|\mathfrak{F}_T) = (1 - \frac{M_T}{a})^+$ für alle $T \geq 0$,
2. $\mathbb{E}(K - M_T)^+ = K\mathbb{P}(\lambda_K < T)$

Hierbei ist die letzte Besuchszeit bei $K > 0$ definiert durch

$$\lambda_K = \sup\{t \geq 0 : M_t = K\}, \sup \emptyset = 0.$$

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Definiere für $\sigma > 0$ den Prozess S durch $S_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ für alle $t \geq 0$. Berechnen Sie mit Hilfe von

Aufgabe 3 für $K > 0$ die Verteilungsfunktion der letzten Besuchszeit in K durch S. Diese ist durch

$$\lambda_K = \sup\{t \geq 0 : S_t = K\}, \sup \emptyset = 0.$$

gegeben.

Abgabe: Die. 29.10.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135

Besprechung: Mittwoch, den 30.10.2013. 12.00-14.00 SR2